José A. Díez Calzada

Iniciación a la Lógica

Ariel Filosofía

José A. Díez

INICIACIÓN A LA LÓGICA

Ariel

Diseño de la cubierta: Joan Batallé

1.ª edición: septiembre 2002

Provença, 260 - 08008 Barcelona

ISBN: 84-344-8764-0

Depósito legal: B. 31.095 - 2002

Impreso en España

SUMARIO

PRÓLOGO

Este libro pretende, como su título connota, servir de guía al lector para iniciarse en el estudio de la lógica. Está destinado principalmente a aquellas personas que necesitan adquirir un conocimiento instrumental de la lógica y no disponen de formación previa alguna en dicha disciplina. Por su orientación, los destinatarios más inmediatos de esta obra son los estudiantes de primer curso de Lógica en aquellos estudios que requieren un conocimiento instrumental de esta disciplina por el uso que de ella se hace en diversas partes de los mismos. Tal es el caso, principalmente, de los estudios de Filosofía, pero también de otros como Lingüística, Psicología, Ciencias de la Computación o Economía. Aunque el libro es pues, primordialmente, un libro de texto para cursos introductorios de Lógica, se ha concebido para que pueda servir también de guía a quien desee iniciarse en la materia de forma autodidacta. Es una obra escrita con la intención de que cualquier persona interesada pueda leerla y adquirir una destreza instrumental suficiente en lógica sin otro auxilio que el texto mismo.

La finalidad de la obra ha determinado su confección, tanto el alcance de sus contenidos como la presentación de los mismos, en los siguientes respectos:

En primer lugar, debe cubrir el ámbito más básico de la materia, pero suficiente en relación al uso que se hace de los formalismos lógicos en otras disciplinas como las mencionadas. Ello se corresponde, básicamente, con (i) la lógica proposicional, (ii) la lógica cuantificacional o de primer orden, y (iii) (la parte más elemental de) la teoría de conjuntos. El libro, además de un capítulo introductorio general, dedica una parte a cada uno de estos ámbitos.

En segundo lugar, los tres ámbitos mencionados cubren el núcleo básico de lo que se considera la lógica deductiva clásica. La obra, por tanto, no se ocupa ni de la lógica inductiva ni de las lógicas no clásicas. Sobre la lógica inductiva se hacen unos breves comentarios en el primer capítulo introductorio donde se presenta la noción de argumentación. Sobre las lógicas no clásicas, se introducen tan sólo comentarios ocasionales, con referencias bibliográficas, en notas a pie de página cuando se presentan aquellos aspectos de la lógica clásica cuyas peculiaridades han suscitado las alternativas no clásicas.

En tercer lugar, al ser la finalidad principalmente instrumental, la presentación de los contenidos, aunque sistemática y rigurosa, se hace de un

modo relativamente informal (en comparación, por ejemplo, con los textos usados en Matemáticas). Es, por así decir, un libro de lógica "con más texto de lo normal". Además, se procede mucho más cuidadosamente en la presentación de los elementos instrumentales básicos que en la de las nociones con interés más teórico-sistemático. Todo ello hace que resulte sin duda una introducción demasiado básica a quienes se interesen por la lógica, no por su uso instrumental en otras disciplinas, sino como disciplina matemático-formal en sí misma. Como libro de texto, está pensado más para los estudiantes que no tengan intereses especiales en la lógica-matemática misma y que probablemente no realicen más cursos de lógica, que para aquellos que se quieran especializar en dicha disciplina. Ello también determina el carácter de los ejemplos y ejercicios, pensados más para familiarizarse con el formalismo que como inicio del estudio matemático de los mismos. El lector con intereses no meramente instrumentales, puede encontrar una presentación también introductoria de los mismos temas (junto a otros adicionales), pero mucho más formal y orientada al estudio de la lógica-matemática como disciplina autónoma, en la obra de C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de Lógica Formal*, de esta misma colección.

En quinto lugar, para que la obra pueda ser leída y trabajada sin auxilio adicional, cada noción se introduce acompañada de varios ejercicios-ejemplo, los primeros de los cuales se presentan a veces muy detalladamente y como si el autor estuviera explicándoselo al lector verbalmente. Ello hace que la presentación sea en ocasiones excesivamente informal, pero se trata de una consecuencia asumida. Por otro lado, y para que el lector pueda contrastar su asimilación de las nociones presentadas, al final de cada capítulo se incluye una lista de ejercicios y en cada sección se especifican cuáles corresponden a las nociones en ella estudiadas. La realización de al menos parte de estos ejercicios es esencial para el correcto aprovechamiento de la obra. El lector no debe iniciar el estudio de nuevos conceptos sin comprobar mediante los ejercicios que ha asimilado correctamente los conceptos que preceden. La dificultad de los ejercicios es creciente en cada sección. El lector no debe desanimarse si tiene dificultades con los últimos, más difíciles, siempre que haya enfrentado con éxito los iniciales y bastantes de los intermedios.[1]

En sexto lugar, el peso relativo que reciben las presentaciones de la lógica proposicional y la lógica de primer orden no es el que suelen recibir en otras presentaciones. La lógica proposicional es muy sencilla, pero en contrapartida su interés como análisis de la argumentación del lenguaje natural es muy limitado. Ello hace que en muchos textos se dedique muy poco espacio a la lógica proposicional en relación a la lógica de primer orden, o que se dejen de presentar algunos aspectos de la primera y se presenten con la segunda. En esta obra, sin embargo, se presenta la lógica

1. Si desea ejercicios adicionales, puede encontrarlos p.e. en: J. L. Falguera y C. Martínez, *Lógica Clásica de Primer Orden* (Trotta, Madrid 1999), E. Pérez, *Ejercicios de Lógica* (Siglo XXI, Madrid 1991) y J. Pagés, *Pràctiques de Lògica* (U. de Girona, Girona 2002). Si desea ejercicios de mayor dificultad y, sobre todo, de carácter menos instrumental y más teórico-sistemático, puede encontrarlos en la obra mencionada *Elementos de Lógica Formal*.

proposicional con todo detalle. El motivo es doble. Por un lado, aunque la lógica proposicional es muy sencilla, prácticamente todas las nociones lógicas de interés se pueden presentar ya en ella. Su sencillez hace que las nociones de *interpretación, consecuencia lógica, verdad lógica, regla de inferencia, cálculo, deducibilidad, teorematicidad* y otras sean fácilmente comprensibles en su ámbito, en cualquier caso mucho más comprensibles que cuando se introducen al mismo tiempo que el lenguaje mucho más complejo de primer orden. Por tanto, presentarlas en detalle ya en la lógica proposicional facilita su posterior asimilación en (la más interesante y compleja) lógica de primer orden. Por otro lado, este proceder tiene el beneficio de resaltar un aspecto fundamental, a saber, que la lógica de primer orden es una *extensión* de la lógica proposicional, o ésta una parte de aquélla. Por tanto, pasar de una a otra es estudiar lo mismo pero con un lenguaje formal que se ha enriquecido con recursos nuevos. Este aspecto se enfatiza en la presentación de los contenidos, que como una simple mirada al índice muestra, sigue exactamente la misma estructura en ambos casos.

En séptimo lugar, y por lo que se refiere a lo lógica de primer orden, se presenta en un primer momento para un lenguaje con signo de identidad, pero sin recursos para obtener términos individuales complejos. Esta simplificación en nada afecta a las ideas semánticas y del cálculo fundamentales y facilita su exposición y asimilación. Tras el estudio completo con esta simplificación, se extiende en el capítulo 10 el lenguaje con functores y el descriptor para subsanar esta limitación, y se indica qué modificaciones supone ello en la semántica y el cálculo. Por otro lado, las tablas semánticas se presentan como procedimiento de decisión de un fragmento de la lógica de primer orden como apéndice del capítulo 9 dedicado a la metalógica de primer orden.

En octavo lugar, en cuanto al cálculo, se ha optado por el cálculo de deducción natural, no el axiomático ni el de secuentes. Estos dos son más útiles a efectos principalmente metalógicos, pero son de más difícil asimilación. El cálculo de deducción natural es muy intuitivo y de más sencillo manejo. Disponiendo de él, el lector puede después comprender más fácilmente los otros si está interesado en ello.

Por último, en la parte dedicada a la teoría de conjuntos se ha incluido un último capítulo dedicado a la aplicación de las nociones conjuntistas al análisis de la validez de argumentos del lenguaje natural. Aunque ello no forma parte del estudio de la teoría de conjuntos propiamente dicho, es conveniente que el lector, además de familiarizarse con un formalismo muy usado en diversas disciplinas, vea cómo se pueden usar los recursos conjuntistas para decidir la validez de argumentos de un fragmento de la lógica de primer orden.

Estas son las principales características de la obra derivadas de la orientación con que ha sido concebida. Si tuviera que resumirse en un subtítulo la motivación y finalidad principales que han guiado al autor en la elaboración de la misma, optaría por algo como "Aprenda lógica sin asustarse" o "No es la lógica tan fiera como la pintan". Ello no pretende sugerir

que se trata de una "divulgación amena" de esta disciplina, ni mucho menos. Se trata de un libro de texto sistemático, un "manual" en el sentido clásico. Sólo quiere connotar que el autor se ha impuesto, por encima de cualquier otra, la máxima de presentar las diversas nociones del modo que sea más fácilmente comprensible para el lector medio y sin ayuda adicional. En qué medida lo haya logrado corresponde al propio lector juzgarlo.

Para concluir, es preciso un breve comentario sobre la secuenciación de los contenidos y sugerencias de lectura. Como se indica al comienzo del capítulo 7, la semántica de primer orden usa de ciertos recursos conjuntistas, y presupone por tanto al lector familiarizado con al menos las nociones conjuntistas generales (cap. 11) y la noción de relación (dos primeras secciones del cap. 12). A pesar de ello, se ha optado por comenzar con las dos partes dedicadas a la lógica proposicional y de primer orden, y dejar la teoría de conjuntos para la última parte. Otra opción podría haber sido comenzar por la teoría de conjuntos y seguir con las otras dos partes de lógica. Sin embargo, en una introducción a la lógica se ha considerado importante que el lector comience por la lógica propiamente dicha. Una vez vista la lógica proposicional, si el lector dispone ya de esas nociones conjuntistas puede pasar a la lógica de primer orden completa. Si no dispone de ellas, puede pasar al menos al capítulo 6 donde se presenta el lenguaje de primer orden y posponer el resto de la segunda parte hasta adquirir dichas nociones en los dos primeros capítulos de la tercera parte. O abordar la tercera parte completa y regresar después a la lógica de primer orden.

Este libro es el fruto de quince años de docencia de Lógica a estudiantes tanto de Filosofía como de otras disciplinas, la mayoría de ellos en la Universitat Rovira i Virgili. Durante su elaboración, a la hora de intentar encontrar el modo más asequible de presentar una idea al lector, me he ayudado siempre de las dificultades sufridas durante todos estos años por mis estudiantes. Quiero dejar constancia aquí de mi deuda y mi agradecimiento por ello, así como por su paciencia. El libro se ha beneficiado también enormemente de las críticas, correcciones y sugerencias de numerosas personas, especialmente M. Campdelacreu, G. Celestino, D. López de Sa, J. Pagés, M. Panza, S. Roca y T. Viader. A todos ellos quiero expresar mi agradecimiento.

JOSÉ A. DÍEZ CALZADA

Barcelona, marzo 2002

Capítulo 1

ARGUMENTACIÓN Y LÓGICA DEDUCTIVA

En este capítulo introductorio vamos a presentar algunas nociones y distinciones básicas que se requieren antes de iniciar el estudio de la lógica propiamente dicho, principalmente las nociones de *argumento* y *validez*, y las distinciones entre argumentos *deductivos* e *inductivos*, entre *lógica proposicional* y *lógica de primer orden*, y entre *lenguaje objeto* y *metalenguaje*.

1. **Argumentos y validez**

En este primer apartado vamos a introducir la noción de argumento que se presupone en el resto del libro y a presentar informalmente la noción de validez de un argumento y su relación con la noción de verdad.

Argumentos e inferencias

El lenguaje cotidiano contiene diversos términos para referirse a nuestro principal objeto de estudio, términos como 'razonamiento', 'argumentación', 'inferencia' o 'argumento'. Algunos usos del lenguaje cotidiano distinguen unos términos de otros. Algunas veces los dos primeros tienen cierta connotación de extensión o complejidad respecto de los segundos. Los razonamientos o argumentaciones tienden en ocasiones a identificarse con procesos argumentativos relativamente largos y complejos, mientras que los argumentos y, sobre todo quizás las inferencias, tienden a considerarse procesos más simples que son los componentes o "pasos" de una argumentación compleja. Esta diferencia no es ni mucho menos general y, en la medida en que exista, es irrelevante para nuestros intereses actuales. En otras ocasiones se distingue entre argumentaciones y argumentos considerando éstos los resultados de aquéllas. Esto es, se considera que argumentar es una actividad, que una argumentación es una acción, y que los argumentos son los productos o resultados de dicha acción. La caracterización que haremos aquí de los argumentos como actos de habla es compatible con esta distinción, y lo que digamos se puede expresar tanto en términos de la acción como en términos del resultado que se pretende

con ella. Esta distinción, por tanto, tampoco es esencial para nuestros fines. Por último, algunos textos distinguen entre *argumentación* y *argumento* considerando que un argumento es el par formado por premisas y conclusión, y que una argumentación está formada por un argumento más una *cadena argumentativa* que "conecta" las premisas con la conclusión. Para nuestros actuales fines, esta distinción tampoco es necesaria. Así pues, vamos a utilizar aquí los mencionados términos del lenguaje cotidiano como variantes estilísticas para expresar una misma noción.

Vamos a sostener aquí que un argumento (razonamiento, argumentación, inferencia) es un tipo especial de acto de habla y, como tal, es algo esencialmente pragmático caracterizado por la *pretensión* del hablante de llevar a cabo determinada finalidad. En relación con dicha finalidad, los argumentos pueden ser vistos como secuencias de (al menos dos) afirmaciones, enunciados o proposiciones. Aunque la diferencia entre enunciados y proposiciones es muy importante, a los efectos presentes no vamos a distinguir entre ambos. O mejor dicho, vamos a considerar que los constituyentes de los argumentos pueden considerarse tanto entidades lingüísticas, los enunciados, como entidades proposicionales, los contenidos de los enunciados. Si bien tendemos a preferir la segunda versión, usaremos en general 'afirmación' para referirnos indistintamente a ambas posibilidades. Pues bien, un argumento es una secuencia de afirmaciones caracterizada por cierta pretensión, la pretensión de que una de ellas "se sigue", "se infiere", "recibe apoyo" o "recibe justificación" de las restantes. A la afirmación de la que se pretende que recibe apoyo la denominaremos 'conclusión', y a las afirmaciones de las que se pretende que se sigue la conclusión, 'premisas'.

En la reconstrucción formal de un argumento, y a efectos puramente pictográficos, suele colocarse la conclusión como última afirmación de la secuencia, pero en el lenguaje natural la conclusión puede estar en cualquier lugar de la serie, aunque comúnmente suele estar al principio o al final. Lo que sirve en el lenguaje natural para identificar a la conclusión es cierto tipo de "marcadores" que se usan al efecto, expresiones como 'por tanto', 'en consecuencia', 'por ello', 'puesto que', 'ya que', etc. Algunos de estos marcadores, como 'por tanto', indican que lo que les antecede son las premisas y lo que les sigue la conclusión; otros, como 'puesto que', funcionan en general inversamente, precedidos por la conclusión y seguidos por las premisas, aunque también pueden iniciar el argumento y tener a continuación primero las premisas y después la conclusión. Otras veces la conclusión está en medio, combinándose ambos tipos de marcadores. Incluso puede que no haya marcadores explícitos y que sea el contexto el que clarifique cuáles son las premisas y la conclusión. En ocasiones hasta puede faltar alguna de las premisas, si el contexto hace suficientemente clara su presencia implícita. Los siguientes casos son ejemplos de las diversas posibilidades (los marcadores se resaltan en cursiva, salvo en A5 que carece de marcador).

A1 "Seguro que su marido está en el club, *puesto que* o está en casa o en el trabajo o en el club, y no está en casa ni en el trabajo."

A2 "Todos los zapatos que había comprado hasta ahora en la zapatería El Pie Ligero me han dado un excelente resultado. *Por tanto*, los zapatos que me acabo de comprar en dicha zapatería seguro que me darán un resultado excelente."

A3 "*Puesto que* los tiranos tienen complejo de inferioridad y Hitler era un tirano, Hitler tenía complejo de inferioridad."

A4 "Los artistas llevan una vida bohemia. Mi hermano lleva una vida bohemia, *puesto que* es artista."

A5 "Todos los presidentes estadounidenses hasta la actualidad han sido varones. El próximo presidente estadounidense será varón."

A6 "Los valientes tienen siempre algún momento de cobardía. *Por tanto*, hasta el mismísimo Agamenón fue cobarde en alguna ocasión."

CORRECCIÓN, VALIDEZ Y VERDAD

Debe quedar claro desde el comienzo que *los argumentos no son verdaderos ni falsos*. Sólo las afirmaciones (los enunciados, o lo que ellos expresan, las proposiciones) pueden ser verdaderas o falsas. Y los argumentos no son afirmaciones, son series de afirmaciones con cierta característica, a saber, que de esa serie de afirmaciones se pretende que una de ellas se sigue de las restantes. Los argumentos no son pues verdaderos o falsos. Pero eso no quiere decir que todos los argumentos sean iguales, que no podamos hablar en su caso de "éxito" o "fracaso". El éxito de un acto de habla es la consecución o logro efectivo de la finalidad pretendida mediante su realización. En una afirmación, en un acto de habla asertórico cuya finalidad es aseverar cómo son las cosas, se satisface dicha finalidad si las cosas son efectivamente como se asevera que son. En una afirmación, por tanto, el "éxito" consiste en su *verdad* y el "fracaso" en su *falsedad*; el acto de habla es exitoso si la afirmación es verdadera y no exitoso si es falsa. Pues bien, también los argumentos son exitosos o no lo son, pero ahora el éxito no consiste en la verdad sino en su *corrección* o *validez*. Los argumentos son correctos/válidos o incorrectos/inválidos.[1] Puesto que los argumentos se caracterizan por la pretensión de que la conclusión recibe apoyo de las premisas, el éxito o fracaso de un argumento dependerá de que tal pretensión sea o no satisfecha. Así, un argumento es correcto, o válido, si efectivamente las premisas apoyan la conclusión, y es incorrecto, o inválido, si no la apoyan. Por tanto, las premisas y la conclusión pueden ser verdaderas o falsas, pero *el argumento mismo no es verdadero ni falso, es válido o inválido*.[2]

1. Algunos autores prefieren hablar de validez sólo para los argumentos deductivos. Otros usan 'validez' para la semántica y 'corrección' para el cálculo. De momento nosotros usaremos indistintamente ambos términos.

2. Es obviamente cierto que la *afirmación* que asevera que determinado argumento es válido, es ella misma verdadera o falsa, y lo es dependiendo de la validez del argumento: la afirmación 'el argumento "..... por tanto —" es válido' es verdadera si y sólo si el argumento ".... por tanto —" es válido (pues eso es lo que asevera dicha afirmación). Pero ello no hace que podamos considerar al argumento mismo como verdadero o falso en ningún sentido interesante. Una

La diferencia entre verdad/falsedad de las afirmaciones involucradas (premisas y conclusión) y validez/invalidez del argumento muestra lo que son los dos componentes de la "bondad" de un argumento. Hay dos sentidos en que se puede decir que un argumento es un *buen argumento*. En un primer sentido, un argumento es "bueno" (exitoso) simplemente si es válido. Que el argumento es válido significa únicamente que las premisas apoyan o justifican la conclusión, en el sentido de que *caso de estar las premisas justificadas*, la conclusión queda también justificada. Esto es, los argumentos válidos "trasladan" la justificación de las premisas a la conclusión. Ahora bien, salvo quizás en cursos de lógica, no solemos argumentar por el placer de hacerlo, sino con la intención de establecer o justificar ante la audiencia cierta afirmación, la conclusión del argumento. Para que la intención de justificar la afirmación se realice satisfactoriamente no basta que el argumento sea válido, pues obviamente puede haber afirmaciones injustificadas que sean conclusiones de argumentos válidos, a saber, cuando alguna de las premisas es ella misma injustificada. Por tanto, aunque la conclusión se infiera efectivamente de las premisas, puede carecer de justificación si alguna de las premisas carece de ella. Así, la validez de un argumento no justifica *por sí sola* la conclusión.

Las mismas consideraciones se pueden hacer presentando la cuestión, no en términos epistemológicos, hablando de *justificación*, sino en términos semánticos, hablando de *verdad*. Estos dos ámbitos están íntimamente relacionados, pues por 'justificación de una afirmación' se entiende "justificación de la creencia en su verdad". Pues bien, planteada la cuestión en términos semánticos, la validez del argumento por sí sola no "apoya" la verdad de la conclusión, para ello es necesario además que las premisas sean verdaderas. El siguiente ejemplo es un caso de argumento válido con premisa(s) falsa(s):

> "Todos los atenienses son filósofos. Sócrates es ateniense. Por tanto, Sócrates es filósofo".

Hemos elegido intencionadamente un caso en el que la conclusión es verdadera, para mostrar que incluso una afirmación verdadera que es conclusión de un argumento válido puede no estar "bien justificada" en el contexto de ese argumento; no lo está si alguna de las premisas es falsa.

Distinguiremos en general la *corrección formal* de un argumento de su *adecuación material*. Diremos que un argumento es *formalmente correcto* si es válido, y que es *materialmente adecuado* si sus premisas son verdaderas. Ahora podemos precisar el segundo sentido en que se puede decir que un argumento es un *buen argumento*: en este segundo sentido, más exigente, un buen argumento es un argumento formalmente correcto, e.e. válido, que además es materialmente correcto, e.e. con premisas verdade-

cosa es un argumento y otra la afirmación de que el argumento es válido. El hecho de que la segunda sea verdadera si y sólo si el primero es válido no convierte al primero en una afirmación.

ras. Para no confundir estos dos sentidos de 'buen argumento' utilizaremos 'válido' para el primero y 'satisfactorio' para el segundo (más fuerte, puesto que incluye el primero). Así, podremos considerar justificada una afirmación presentada como conclusión de un argumento en la medida en que el argumento sea satisfactorio. Esto es, estamos justificados en creer en la verdad de la conclusión de un argumento en la medida en que (estemos justificados en creer que) el argumento es válido y estemos justificados en creer en la verdad de sus premisas.[3]

2. Argumentos deductivos y argumentos inductivos

Una vez vista la noción general de argumento, vamos a distinguir entre argumentos deductivos y argumentos inductivos para señalar con precisión nuestro objeto de estudio en este libro, que no son los argumentos en general sino sólo los deductivos.

Apoyo deductivo y apoyo inductivo

Hasta ahora hemos hablado de corrección o validez de argumentos de un modo muy general. Un argumento es válido si la conclusión es apoyada por, o se sigue de, las premisas. La cuestión es cómo hay que entender la noción de *seguirse de* o *apoyar*, pues en tanto no se precise esa noción, la noción de *validez* permanecerá imprecisa. Aquí es donde es importante insistir en que los argumentos se caracterizan por cierta pretensión de quien lo realiza, pues hay diferentes sentidos en los que se puede pretender que una afirmación se sigue de, o es apoyada por, otras. En función de cuál sea ese sentido tenemos diferentes tipos de argumentos, cada tipo con sus correspondientes criterios de validez.

En este capítulo veremos los dos tipos clásicos de argumentos, los *deductivos* y los *inductivos*. En una acepción extremadamente amplia de 'argumento' habría más tipos de argumentos. Si, según esta acepción, lo que se pretende al argumentar es simplemente persuadir a la audiencia de que forme cierta creencia, entonces hay muchas formas de pretender "apoyar" la "conclusión". Por ejemplo, apelando a la fuerza mediante amenaza, "argumentaciones" *ad baculum*, ("la Tierra no se mueve, si lo niegas serás condenado"),[4] o a ciertas emociones ("¡mi defendido es inocente de la acusación de abusos deshonestos!, ¿cómo pueden pensar lo contrario de un ejemplar padre de familia y respetado benefactor de la comu-

3. Si se tomase en consideración la cadena argumentativa, entonces habría de incluirse en la evaluación de un argumento como un buen argumento. En ese caso, requeriríamos, además de que sea válido y sus premisas sean verdaderas, que la cadena argumentativa mostrase que las premisas apoyan la conclusión, esto es, que mostrase su validez.

4. En los casos en que se apela a la fuerza, ni siquiera es claro que lo que se intente sea que el interlocutor adquiera una creencia; más bien muchas veces se pretende sólo que el interlocutor se comporte *como si* tuviese esa creencia.

nidad?"), o a otros variados recursos. Ahora bien, aunque hay quien "argumenta" así (los demagogos son un caso paradigmático de ello), sólo son argumentos en apariencia, no se pueden considerar argumentos en sentido propio. Son formas de "discurso persuasivo" no argumentativas. Aunque a veces en el lenguaje común se tiende a utilizar 'argumentar' para cualquier forma de discurso persuasivo (p.e. el de los abogados ante los jurados), en sentido estricto los argumentos son sólo una de las formas del mismo, la forma más racional en tanto que intenta persuadir mediante razones.[5]

Consideraremos, pues, sólo dos tipos de argumentación, la deductiva y la inductiva. Tal como hemos presentado la noción de argumento, debe quedar claro que la diferencia entre ambos radica exclusivamente en la pretensión del hablante. Los argumentos deductivos se caracterizan porque en ellos se pretende que la verdad de las premisas *garantiza plenamente* la de la conclusión, mientras que en los inductivos se pretende que las premisas apoyan la conclusión sólo *en cierto grado*.[6] Pero en principio, y salvo convenciones que siempre es posible adoptar, nada formal o estructural distingue los argumentos deductivos de los inductivos; la diferencia es intencional, radica exclusivamente en las intenciones del hablante respecto del sentido pretendido en que la conclusión se sigue de las premisas. Quizás esto resulte sorprendente, pues no habrá sido difícil adivinar, de entre los ejemplos que hemos dado más arriba, cuáles eran deductivos y cuáles inductivos sin que se haya informado de la pretensión en cada caso. Pero ése es un efecto ilusorio derivado de que esos ejemplos son todos argumentos válidos (según el tipo -no declarado- que hemos pretendido que tiene cada uno y que el lector quizás haya adivinado). Es cierto que un argumento deductivo, si es válido, es válido en virtud de su forma, pero no es cierto que un argumento, si es deductivo, es deductivo (válido *o inválido*) en virtud de su forma. Considérense los siguientes argumentos (que no contienen premisas implícitas).

A7 "El primer coche de Fernando le dio buen resultado. La segunda casa de Luis le dio buen resultado. Por tanto, el tercer ordenador que me compre me dará buen resultado."

5. Como en toda distinción, hay casos intermedios difíciles de clasificar, p.e. el de la retórica, que por una parte parece una forma específica de discurso argumentativo y por otra una variante sofisticada de la mera persuasión. Hay también otros tipos de argumentos, en principio diferentes de los deductivos e inductivos, que no son "meramente persuasivos o retóricos", principalmente los argumentos *por analogía* y por *abducción*. Los segundos pueden considerarse una especie de los argumentos inductivos, entendiendo por éstos cualquier tipo de inferencia ampliativa. Los primeros constituyen una especie argumentativa peculiar y dependen de fenómenos pragmáticos muy complejos que exceden los límites de nuestro estudio.

6. La pretensión del hablante puede ser, y en muchos casos es, una pretensión *implícita* o *tácita*; esto es, no tiene por qué ser capaz de explicitarla o articularla en los términos que aquí lo hacemos. Por otro lado, el hecho de atribuir al que argumenta inductivamente la pretensión de que el apoyo es sólo parcial, no significa que él sólo "desee" eso. Quizás desea justificar plenamente la conclusión, pero por saber (al menos implícitamente) que ello no es posible en cierto caso, acepta pretender sólo una justificación parcial.

A8 "Juan es arquitecto. Luisa es médico. Por tanto, Fernando es escritor."

A9 "El último presidente estadounidense es varón. Por tanto, el próximo presidente mexicano será varón."

A10 "El último presidente estadounidense es demócrata. Por tanto el próximo presidente estadounidense será demócrata."

A11 "Algunos hombres son mortales. Por tanto, todos los hombres son mortales."

A12 "Algunos hombres son mortales. Sócrates es hombre. Por tanto, Sócrates es mortal."

Seguramente ahora ya no parecerá tan sencillo identificar cuáles son deductivos y cuáles inductivos. Simplemente no es posible, como tampoco lo era antes con A1-A6 (a no ser que nos dijeran, o se presupusiera, como ha hecho el lector, que eran válidos). Lo que hace a un argumento inductivo o deductivo es la naturaleza del apoyo *pretendido* entre premisas y conclusión. Puesto que dicho apoyo pretendido es diferente, los criterios de corrección también son diferentes (un argumento puede ser deductivamente inválido pero inductivamente válido, p.e. A5). Para evaluar la validez de un argumento es preciso entonces conocer *antes* si es deductivo o inductivo, y nada en la forma del argumento (si incluimos los inválidos) indica tal cosa. Eso sólo se puede saber conociendo las pretensiones del hablante. Esto es así hablando estrictamente, otra cosa es que el contexto sugiera de algún modo el tipo de argumento de que se trate, esto es, sugiera las intenciones del hablante o proponente del argumento.

Aunque ya se ha sugerido en la exposición, conviene aclarar explícitamente que las anteriores consideraciones se refieren a la diferencia entre argumentos *deductivos* y argumentos *inductivos*, no a la diferencia entre argumentos *deductivos válidos* y argumentos *inductivos válidos*. La diferencia entre argumentos deductivos e inductivos radica en las intenciones del hablante, pero por supuesto ello no implica que la diferencia entre argumentos *deductivos válidos* y argumentos *inductivos válidos* sea pragmática o dependiente de las intenciones o del contexto. Esta segunda diferencia es una diferencia objetiva, independiente del hablante y del contexto, y consiste en que entre premisas y conclusión se dé una de dos relaciones objetivamente diferentes. Un argumento, como acto de habla de un hablante, es deductivo o inductivo si el hablante pretende que entre premisas y conclusión se da la relación objetiva de *apoyo deductivo* o si pretende que se da la relación objetiva de *apoyo inductivo*. Y el argumento será válido si la relación objetiva entre premisas y conclusión es de hecho la que el hablante pretende que es. En tanto que acto de habla, no hay modo de determinar si un argumento es deductivo o inductivo sin conocer las intenciones del hablante; pero una vez determinada su intención, que el argumento deductivo/inductivo sea válido o inválido es perfectamente objetivo e independiente de sus intenciones y del contexto.

VALIDEZ DEDUCTIVA, PARTÍCULAS LÓGICAS, FORMA LÓGICA

En los argumentos deductivos el sentido pretendido en el que las premisas apoyan o justifican la conclusión es el más fuerte posible. Estos argumentos se caracterizan por la pretensión de que la información que proporciona la conclusión está "contenida" en la información que proporcionan las premisas conjuntamente. Un modo de desarrollar esta idea es apelar a la relación entre la verdad/falsedad de premisas y conclusión. Puesto que lo que se pretende es que la información de la conclusión "es parte de" la información que dan las premisas, y no puede ser que cierta cantidad de información sea verdadera pero una "parte" suya sea falsa, se puede caracterizar la pretensión deductiva como la pretensión de que la verdad de las premisas *garantiza plenamente* la verdad de la conclusión. Un argumento deductivo es válido si efectivamente las premisas apoyan la conclusión de ese modo, si la información de la conclusión está contenida en la de las premisas, *si no puede ocurrir que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa*. Recuérdese que para la validez o corrección formal no importa que las premisas sean o no de hecho verdaderas, lo que se pretende es que si las premisas *fuesen* verdaderas entonces la conclusión también *sería* verdadera. Por tanto, en los argumentos deductivos no se puede dar cualquier combinación entre validez/invalidez y verdad/falsedad de premisas y conclusión. Si el argumento es inválido se puede dar cualquier combinación de verdad y falsedad de premisas y conclusión, pero no si es válido. Puede haber argumentos deductivos válidos con premisas verdaderas y conclusión verdadera, como A13 (en lo que sigue, en el resto de esta sección *pretendemos* que los argumentos son deductivos); o con premisas falsas y conclusión verdadera, como A14; o con premisas falsas y conclusión falsa, como A15.

A13 "Todos los hombres son mortales. Sócrates es hombre. Por tanto, Sócrates es mortal."

A14 "Todos los hombres son griegos. Sócrates es hombre. Por tanto, Sócrates es griego."

A15 "Todos los hombres son rusos. Sócrates es hombre. Por tanto, Sócrates es ruso."

Pero no puede haber un argumento deductivo válido con premisas verdaderas y conclusión falsa. Esa es la única combinación excluida, pues la validez deductiva supone precisamente que, caso de ser verdaderas las premisas, la conclusión también lo es.

En adelante, cuando queramos esquematizar los argumentos deductivos escribiremos en serie las afirmaciones involucradas separando la conclusión de las premisas mediante una línea continua para connotar que el apoyo pretendido es el máximo:

La disciplina que se ocupa de estudiar los criterios de validez de los argumentos deductivos es la *lógica deductiva*, que es de la que nos vamos a ocupar en esta asignatura. Como ya hemos indicado, la validez deductiva se caracteriza por cierta relación entre la verdad de las premisas y la de la conclusión: un argumento deductivo es válido cuando no es posible que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa. La validez de los argumentos deductivos depende de su *forma* o *estructura*. La estructura o forma lógica de un argumento es aquello que resulta de abstraer o "vaciar" del argumento sus expresiones no lógicas, o como se dice técnicamente, de convertir el argumento en un esquema argumentativo sustituyendo las expresiones no lógicas por variables. Las expresiones lógicas son expresiones como 'todos', 'algunos', 'y', 'no', 'si ... entonces', etc. Estas expresiones se consideran partículas *lógicas* del lenguaje porque, como veremos detenidamente en los temas siguientes, de ellas depende la validez de los argumentos (deductivos). La validez de un argumento depende de ellas en el siguiente sentido: si en un argumento sustituimos alguna de estas expresiones por otra de la misma categoría sintáctica (p.e. 'y' por 'o', o 'todos' por 'algunos', etc.), la validez del argumento puede verse afectada; mientras que, por el contrario, la sustitución de las otras expresiones (p.e. 'Sócrates' por 'Platón', o 'mortal' por 'griego') no afecta a la validez.

Así, por ejemplo, si en A1, que es válido, cambiamos todas las ocurrencias de 'y' por ocurrencias de 'o', el nuevo argumento resultante es inválido. Y los mismo sucede con A13 si sustituimos 'todos' por 'algunos' (e.e. A12). Contrariamente, si en A13 sustituimos 'mortal' por 'griego' (e.e. A14) o 'Sócrates' por 'Platón', los nuevos argumentos preservan la validez del original. El *esquema lógico* o *forma lógica* de un argumento se obtiene pues "abstrayendo" del mismo las expresiones no lógicas; esto es, sustituyendo en los argumentos las expresiones no lógicas por "huecos", o como diremos técnicamente, por *variables* apropiadas que indiquen el tipo sintáctico de la expresión no lógica. Así, por ejemplo, A13, A14, A15 y A3, tienen la misma forma lógica (nótese que no distinguimos entre 'todos los tal son cual', que aparece en A13, A14 y A15, y "los tal son cual", que aparece en A3; esto se justificará cuando presentemos la lógica de primer orden):

todos los S son P
a es S

a es P

(donde S y P están por propiedades *cualesquiera* y a por un individuo *cualquiera*).

Y A1 tiene la misma forma lógica p.e. que "Juan estudiará biología, puesto que podía estudiar matemáticas, física o biología, y no estudiará ni matemáticas ni física", a saber:

α o ß o γ
no α y no ß

γ

(donde α, ß y γ están por afirmaciones *cualesquiera*).

En el resto del libro estudiaremos por extenso la noción de forma lógica. Para los actuales fines introductorios, basta de momento retener la idea central, que, insistimos, es la siguiente:

La validez/invalidez de un argumento depende de algunas de las expresiones que contiene, y no de otras. Las primeras, ésas que no se pueden modificar sin correr el riesgo de afectar la validez/invalidez, son las expresiones o partículas lógicas. Las partículas lógicas determinan la forma lógica del argumento. Dos argumentos tienen la misma forma lógica si contienen las mismas partículas lógicas dispuestas del mismo modo. Puesto que la validez/invalidez depende de las partículas lógicas, los argumentos serán válidos/inválidos en virtud de su forma; esto es, argumentos con la misma forma serán todos válidos o todos inválidos.

Nuestro objeto de estudio, la lógica deductiva, tiene por objeto determinar los esquemas o patrones de deducción válida. Antes de indicar cómo vamos a realizar ese estudio, comentaremos muy brevemente algunos aspectos de la validez inductiva, que quedará a continuación definitivamente al margen de nuestro estudio.

VALIDEZ INDUCTIVA

Los argumentos deductivos son sólo *explicativos*, mediante ellos no se establece información material nueva. Si ellos constituyesen el único tipo de argumentación disponible, no podríamos establecer o justificar argumentativamente información nueva. Pero, en cierto sentido que se debe precisar, a veces justificamos argumentativamente información nueva. Por tanto, hay argumentos justificativos no deductivos. Contemplemos p.e. el siguiente argumento.

A16 "Casi todos los fumadores de larga duración acaban padeciendo enfermedades pulmonares. Juan es un fumador de larga duración. Por tanto, seguramente Juan padecerá un enfermedad pulmonar."

¿Hay algún sentido de 'apoyar' en que se pueda considerar que las premisas "apoyan" a la conclusión? Parece obvio que sí; esto es, parece claro que hay un sentido en el que uno está justificado en creer la conclusión *si* está justificado en creer las premisas. Por tanto, hay algún sentido en que este argumento es válido. ¿Es ese sentido el sentido *deductivo*?

Claramente no. Aunque todavía no hemos estudiado las inferencias deductivas válidas, las intuiciones del lector le dirán seguramente que A16 es deductivamente inválido; esto es, que la información que presenta la conclusión no está "contenida" en la de las premisas, que la conclusión proporciona información "nueva", que las premisas podrían ser verdaderas y la conclusión falsa. Si ello es así (y lo es), entonces se trata efectivamente de un argumento que es deductivamente inválido. Por tanto, si intutivamente nos parece que es un argumento válido, es que estamos implícitamente tomando en consideración una noción de validez diferente de la validez deductiva.

Estos argumentos en los que, aun siendo correctos, la conclusión contiene más información que las premisas, son los argumentos inductivos. Así, contrariamente al carácter meramente explicativo de los deductivos, los argumentos inductivos se caracterizan por ser *aumentativos*. Puesto que en argumentos inductivos válidos la conclusión contiene más información que las premisas, lo que pretendemos en esos argumentos no puede ser que la verdad de las premisas garantiza plenamente la verdad de la conclusión. En un argumento inductivo *válido* es posible cualquier combinación de verdad y falsedad de las afirmaciones involucradas, incluida aquélla en que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. ¿Qué pretensión caracteriza entonces estos argumentos? ¿Qué tipo de apoyo se pretende que confieren las premisas a la conclusión? Se pretende sólo que las premisas apoyan o justifican la conclusión *en cierto grado*, que la verdad de las premisas hace "probable" la conclusión. Nuestra pretensión en A2 y A5 era de este tipo; ambos son, *de acuerdo con las intenciones con que los presentamos*, argumentos inductivos. Cuando queramos esquematizar los argumentos inductivos escribiremos en serie las afirmaciones involucradas separando la conclusión de las premisas mediante una línea discontinua para connotar que el apoyo pretendido es sólo parcial.

α_1

β

A veces se expresa la diferencia entre deducción e inducción diciendo que la segunda, contrariamente a la primera, "va de lo particular a lo general". Si con ello se quiere decir que en un argumento inductivo válido las premisas son siempre todas afirmaciones particulares ("este es tal y cual", "ese es tal y cual", "aquél es tal y cual", ...) y la conclusión es una afirmación general, no es cierto. En primer lugar, hay argumentos con premisas particulares y conclusión general, aunque *existencial*, que son *deductivamente* válidos, p.e. A20. Por otro lado, aunque muchos argumentos inductivos, como A22, tienen premisas particulares y conclusión general *universal*, no siempre es así, la conclusión puede ser también particular, como en A21. Además, hay argumentos inductivos con premisas generales y conclusión particular, como A5, y también con conclusión general universal, como A23.

A20 "Sócrates es filósofo. Por tanto, alguien es filósofo."
A21 "2 es la suma de dos primos. 4 también. 6 también. 8 también. 10 también. 12 también. ... 4816 también. Por tanto, 4818 es la suma de dos primos."
A22 "2 es la suma de dos primos. 4 también. 6 también. 8 también. 10 también. 12 también. ... 4816 también. Por tanto, todo par es la suma de dos primos."
A23 "Todos los cuervos observados son negros. Por tanto, todos los cuervos son negros."

En los argumentos inductivos válidos, por tanto, es posible cualquier combinación de afirmaciones particulares y generales en premisas y conclusión. La caracterización de la inducción como "paso de lo particular a lo general", aplicada a estos argumentos, expresa sólo que en ellos la conclusión contiene información nueva respecto de las premisas, sólo en ese sentido es más general que aquéllas.

La pretensión que caracteriza a los argumentos inductivos también puede ser, como en los deductivos, satisfecha o no, y en función de ello se consideran válidos o inválidos. Como ya mencionamos, algunos autores prefieren reservar 'válido' sólo para los argumentos deductivos y utilizar 'correcto' o 'fuerte' para los inductivos. En cierto sentido ello es adecuado, pues 'válido' no se dice igual de los argumentos inductivos que de los deductivos. Pero para ello basta cualificar el tipo de validez, y usar 'validez deductiva' y 'validez inductiva' según sea el caso. Por otro lado, utilizar en ambos casos la misma expresión (adecuadamente cualificada en cada caso) expresa la idea de que hay algo común en los dos tipos de validez, a saber, que se ha satisfecho adecuadamente la *pretensión de apoyo*, aunque en cada caso el tipo de apoyo sea distinto. Aquí seguiremos ateniéndonos a esta práctica.

La disciplina que se ocupa de los criterios de validez de los argumentos inductivos, de las condiciones en las que se cumple efectivamente su pretensión, es la *lógica inductiva*. Esta disciplina es mucho más difícil y problemática que la lógica deductiva, tanto que para muchos autores está condenada al fracaso. El motivo de la dificultad tiene que ver, obviamente, con la dificultad de desarrollar métodos para evaluar si la pretensión es satisfecha o no lo es. Lo que se pretende en los argumentos inductivos no es que la verdad de las premisas garantiza plenamente la verdad de la conclusión, sino sólo que la apoya en cierto grado, que las premisas no hacen cierta la conclusión sino sólo "probable". Mediante el entrecomillado, queremos indicar que la noción de probabilidad usada en esta caracterización general es una noción preteórica intuitiva e informal. No pretende referir a alguna noción técnica específica de alguna teoría o concepción particular de la probabilidad. Estas nociones técnicas son justamente el recurso mediante el que algunos autores construyen su propia lógica inductiva como elaboración y precisión de la caracterización general que hemos dado. De momento, por tanto, el lector deberá recurrir sólo a sus propias intuiciones sobre esta noción. Y ya la noción intuitiva de probabilidad mues-

tra algunas peculiaridades de los argumentos inductivos. La primera se deriva del carácter gradual de la probabilidad.

En cualquier acepción que se quiera, la probabilidad es algo que no se da bipolarmente según un "todo o nada". La verdad corresponde a las afirmaciones bipolarmente, una afirmación es verdadera o no lo es, no es "más o menos verdadera", o "verdadera en cierto grado", a no ser que ello sea justamente sólo otro modo de decir que es probable. Una afirmación verdadera no puede ser *más verdadera* que otra también verdadera. Ello no ocurre con la probabilidad. Quizás pueda haber un sentido en el que una afirmación simplemente es probable o no lo es (cuando su probabilidad es mayor que 0), pero es un sentido derivado del sentido gradual usual. Lo esencial es que si una afirmación es probable (tiene probabilidad no nula), puede serlo más o menos, *en diversos grados*: una afirmación probable puede ser más probable que otra también probable. Esto tiene consecuencias para la noción de *validez inductiva*. Los argumentos inductivos son válidos si es efectivamente satisfecha la pretensión de que la verdad de las premisas hace probable la conclusión. Pero como, relativamente a la verdad de las premisas, la conclusión puede ser más o menos probable, ese carácter gradual de la probabilidad se traslada a la satisfacción de la pretensión, esto es, a la validez inductiva. No hay argumentos deductivos más o menos válidos; un argumento deductivo válido no puede ser más válido que otro. La validez deductiva es cuestión de *todo o nada*. Eso no pasa con la validez inductiva. Un argumento inductivo puede ser *mejor (más fuerte) que* otro, si en el primero las premisas confieren más apoyo a la conclusión que en el segundo; o un argumento inductivo puede ser *sólo un poco válido* (muy débil), o *muy válido* (muy fuerte), etc. Cuál es el grado mínimo de apoyo de las premisas a la conclusión para considerar al argumento "suficientemente válido", y cómo se debe medir dicho grado, son los principales problemas de la lógica inductiva.

Hemos dicho que lo característico de la validez inductiva es el grado de apoyo o probabilidad que las premisas confieren a la conclusión. Debe quedar claro que lo que importa aquí no es la probabilidad de la conclusión sin más, no importa cuán probable es la conclusión *en sí misma*, independientemente de las premisas. Lo que importa es la probabilidad de la conclusión *relativamente a (la verdad de) las premisas*. En los argumentos deductivos la verdad de la conclusión no determina la validez del argumento; puede haber argumentos deductivos inválidos con conclusión verdadera (y premisas también verdaderas). Análogamente, en los argumentos inductivos la alta probabilidad de la conclusión "en sí misma" no determina que el argumento sea válido; puede haber argumentos inductivos *inválidos* con conclusión muy probable (y premisas verdaderas). Por ejemplo: "Todos los días hasta la fecha ha salido el sol. Por tanto, en la próxima jugada de la ruleta saldrá un número diferente de 1". Lo que importa para la validez inductiva, insistimos, es la probabilidad de la conclusión *relativamente a la verdad de las premisas*.

La dificultad más inmediata de la lógica inductiva es el carácter gradual de la validez inductiva. Otra dificultad no menos importante, y

relacionada con ella, tiene que ver con el sentido en que la lógica inductiva es "formal". En principio, toda lógica es *formal*. No se estudia tanto la validez de inferencias concretas cuanto patrones o esquemas de inferencia válida, pues la validez no depende de los aspectos materiales de las inferencias. La lógica deductiva es el mejor ejemplo de ello. En la lógica inductiva, sin embargo, no está claro en qué consiste exactamente su carácter formal. La invalidez inductiva *absoluta* sí parece ser formal en un sentido inmediato, pero poco interesante. Considérese, como ejemplo, el "argumento" (supuestamente inductivo) mencionado en el párrafo anterior, o el siguiente (también, supongamos, pretendidamente inductivo): "Los presidentes estadounidenses han sido todos varones hasta el momento, por tanto el próximo par de zapatos que me compre me dará buen resultado". Pero estos casos tan claros son desde luego poco interesantes (nadie argumenta inductivamente mal "así"). El problema lo plantean argumentos mínimamente interesantes, por ejemplo A2 y A5. Según qué entendamos por forma lógica, las afirmaciones involucradas en A2 y A5 tienen la misma forma lógica, ambos argumentos tendrían la misma estructura. Pero imaginemos, respecto de la primera premisa de A2, que sólo he comprado un único par de zapatos antes en dicha zapatería; es claro que en tal caso no se pueden equiparar ambos argumentos en validez o fuerza inductiva. Parecería, entonces, que la validez inductiva depende, en algún sentido que se debería precisar, de algunos aspectos "cuasi-materiales" y que por tanto la lógica inductiva no es "formal".

La anterior conclusión es sin embargo apresurada. A2 y A5 tienen la misma estructura, la misma forma lógica, sólo si por forma lógica de una afirmación entendemos aquí aproximadamente lo mismo que entendemos en la lógica deductiva. La forma lógica es el esquema que queda cuando abstraemos todas las expresiones salvo las partículas lógicas, esto es, salvo los componentes de los que depende la validez de la inferencia. Pero en ese caso la forma lógica *inductiva* de una afirmación no tiene por qué coincidir con, o aproximarse a, su forma lógica *deductiva*, pues los componentes de los que depende la validez de ambos tipos de inferencias no son los mismos. Por tanto, no es que la lógica (validez) inductiva no sea formal, sino que la forma lógica inductiva es extremadamente compleja y toma en consideración algunos aspectos que en la lógica deductiva tienden a considerarse materiales. Por ejemplo, los sistemas de lógica inductiva toman en cuenta el número de casos particulares que sustentan una afirmación general (como las primeras premisas de A2 y A5); algunos de ellos toman en cuenta además *la calidad* de los casos particulares; otros, incluso el nexo causal involucrado. Todo ello hace que esta disciplina sea extremadamente difícil de desarrollar satisfactoriamente, y que, a pesar de haber nacido casi al mismo tiempo que la lógica deductiva, apenas haya avanzado y no se disponga todavía de una versión estándar aceptable por todos. Nosotros, como dijimos, no nos ocuparemos más de ella en este libro. A partir de este momento, por tanto, consideraremos que todos los argumentos que presentemos serán deductivos.

3. **Falacias**

Casi todos cometemos errores en la argumentación en algunas ocasiones, algunos en muchas ocasiones y unos pocos prácticamente siempre. Hay por supuesto muchas formas de argumentar inválidamente, muchos esquemas de inferencia inválidos. Por lo general, sin embargo, ni siquiera quienes suelen argumentar mal producen argumentos totalmente descabellados. Con frecuencia las argumentaciones inválidas siguen ciertos patrones típicos. A estas formas típicas o usuales de argumentar inválidamente se las denomina 'falacias'. A veces también se denominan así otras formas de "lograr apoyo" en las que no se pretende propiamente construir un argumento en sentido estricto sino simplemente utilizar alguna otra forma de persuasión. Aquí aplicaremos el término sólo cuando esté presente la intención de producir un argumento en sentido estricto. Comentaremos brevemente sólo las más conocidas, principalmente referidas a la argumentación deductiva, pero también algunas inductivas.

Petición de principio

Antes de ver las falacias propiamente dichas, mencionaremos un tipo de argumentación "insatisfactoria" que no es exactamente una falacia en el sentido indicado, pues constituye de hecho un patrón formalmente válido, aunque trivial. Se trata de la *petición de principio* (*petitio principii*). Brevemente: se comete una petición de principio cuando se da por probado lo que se quiere demostrar, esto es, cuando se incluye (quizás subrepticiamente) la conclusión como una de las premisas. Por supuesto que es un argumento formalmente válido, pues responde al patrón de inferencia válido indicado a continuación, pero es un argumento insatisfactorio por trivial. Si éstos se considerasen satisfactorios, no haría falta mucho para argumentar satisfactoriamente.

$$\alpha$$

$$\alpha$$

Quizás se piense que no se puede ser muy estricto en este punto, pues después de todo en los argumentos deductivos válidos siempre ocurre que la información de la conclusión *ya está de algún modo contenida en las premisas*. Bien, pero si deducir satisfactoriamente consiste en hacer explícitas consecuencias implícitas, hay una diferencia entre *estar implícitamente en* y *ser directamente una de* las premisas. En las deducciones interesantes la conclusión se obtiene por el efecto combinado de varias premisas. Pero tampoco puede ser éste es el criterio definitivo, pues hay deducciones con una única premisa. Además, todo argumento se puede reescribir siempre como constituido de una única premisa con-

yuntando las que tenga originalmente. La idea, difícil de precisar, es que se comete petición de principio cuando la conclusión está *en prácticamente su misma forma* como una de las premisas. Esta caracterización es reconocidamente vaga y a veces no está claro si se comete esta irregularidad o no, pero hay casos claros, aunque sutiles, de este truco argumentativo. El discurso filosófico contiene interesantes ejemplos en los que se pretende que se están usando ciertas premisas para establecer determinada conclusión, cuando en realidad ésta se presupone "casi en su misma forma", quizás a veces como premisa oculta (un ejemplo se puede encontrar, según algunas interpretaciones, en el famoso *círculo cartesiano* que, según esas interpretaciones, presupone la existencia de un Dios no engañador en la "demostración" de su existencia a partir del *cogito*).

Falacias formales

Estas falacias corresponden a esquemas argumentativos cuya estructura "está clara" (no hay p.e. problemas de ambigüedad) y tales que muchos usuarios no adiestrados en lógica tienden a considerar esquemas de inferencia válidos, pero no lo son. Dos muy comunes son las falacias de *afirmación del consecuente* y de *negación del antecedente* que corresponden, respectivamente, a los siguientes esquemas (piense el lector un ejemplo que muestre su invalidez):

si a entonces ß
β

si a entonces ß
no α

No vamos a decir de momento nada más de las falacias formales deductivas, pues ellas van a ser parte de nuestro objeto de estudio el resto del curso. En cuanto a las falacias formales inductivas, ya mencionamos en el apartado anterior que muchas veces la invalidez inductiva se debe a la *insuficiencia de datos*. En muchos casos la invalidez es claramente explícita, p.e.

el único *A* observado hasta el momento es *B*
a es *A*

a es *B*

Pero ya vimos que no siempre se manifiesta en la forma aparente del argumento. Un argumento de la forma

todos los *A*s observados hasta el momento son *B*s
a es *A*

a es *B*

puede ser inválido, si los casos observados son relativamente pocos (nótese que en el argumento anterior a éste también ocurre que todos los casos observados de A son también B, pero sólo se ha observado uno).

Como dijimos, parte del problema de la lógica inductiva se debe a la dificultad de elucidar satisfactoriamente cómo depende la validez de un argumento de la cantidad y calidad de los datos mencionados en las premisas y cómo ello se puede expresar formalmente. No podemos detenernos aquí en este problema. Mencionaremos tan sólo otro caso, especialmente destacado, de error inductivo. En este caso el error consiste en considerar válido un tránsito entre dos argumentos, que es admisible en lógica deductiva pero no en lógica inductiva. En efecto, en lógica deductiva ocurre que si en un argumento válido añadimos nuevas premisas, el argumento resultante sigue siendo válido:

Si $\begin{matrix}\alpha \\ \\ \gamma\end{matrix}$ es válido, entonces $\begin{matrix}\alpha \\ \delta \\ \gamma\end{matrix}$ también es válido.

El motivo de este hecho debe estar claro ya tras los comentarios introductorios sobre validez deductiva que hicimos anteriormente. Si un argumento deductivo es válido cuando la información de las premisas contiene la información de la conclusión, entonces al añadir nuevas premisas, esto es, al añadir *más información*, la nueva información contiene al menos lo mismo que contenía antes, a saber, la información de la conclusión. Sin embargo, el hecho análogo no sucede en lógica inductiva. Así, por ejemplo, el siguiente argumento es inductivamente válido

A la mayoría de los norteafricanos de Barcelona la policía les pide alguna vez la documentación
Ahmed es norteafricano residente en Barcelona
- -
A Ahmed la policía le pedirá alguna vez la documentación

Pero, sin embargo, si añadimos nuevas premisas el argumento resultante puede ser inválido, por ejemplo:

A la mayoría de los norteafricanos de Barcelona la policía les pide alguna vez la documentación
Ahmed es norteafricano residente en Barcelona
A los que circulan en Rolls Royce la policía casi nunca les pide la documentación
Ahmed circula en Rolls Royce
- -
A Ahmed la policía le pedirá alguna vez la documentación

El motivo de que ahora no se preserve la validez es que, como vimos, la validez inductiva no consiste en que la información de las premisas *con-*

tenga la información de la conclusión. Hay muchos otros fenómenos parecidos al que acabamos de ver y que se derivan del mismo hecho, pero no podemos detenernos ahora en ellos.

Ambigüedad e imprecisión

El siguiente grupo importante de falacias tiene que ver con alguna forma de indeterminación de algunas de las afirmaciones involucradas. Esta indeterminación puede ser debida a ambigüedad o a vaguedad; la ambigüedad a su vez puede ser formal o material.

Los casos de ambigüedad formal son aquellos en los que no está clara la forma lógica de alguna de las afirmaciones involucradas. Las afirmaciones se puede interpretar de varios modos y en alguno de esos modos el argumento es inválido. Un ejemplo típico es la afirmación de la forma "todos los *P* no son *Q*", que (como veremos en la parte dedicada a la lógica de primer orden) se puede interpretar como "no todos los *P* son *Q*" o como "todos los *P* son no-*Q*", esto es, "ningún *P* es *Q*". Así, un argumento como

> "Todos los filósofos no son dualistas; Descartes es filósofo. Por tanto, Descartes no es dualista",

es ambiguo. El argumento puede corresponder a uno de los dos patrones siguientes y sólo el de la derecha es válido:

no todos los *P* son *Q*	todos los *P* son no-*Q*
a es *P*	*a* es *P*
a no es *Q*	*a* no es *Q*

Un error típico de argumentación consiste en realizar una argumentación como ésta, cuando la premisa ambigua sólo es "aceptable" en la primera interpretación (más débil), y pretender sin embargo que el argumento es válido, confundido por el hecho de que sí es válido según la otra interpretación de la premisa crítica; premisa que en esta otra interpretación, mucho más fuerte, ya no sería aceptable.

Otro caso típico de ambigüedad formal tiene que ver con la acción conjunta de dos cuantificadores, como en la primera premisa del siguiente argumento:

> "Los alumnos admiran siempre a un profesor. Juan y Luis son alumnos. Por tanto, Juan y Luis admiran al mismo individuo."

Las formas lógicas precisas correspondientes a las dos interpretaciones aquí involucradas se verán claras cuando estudiemos el lenguaje de primer orden, pero podemos adelantar ya que la ambigüedad se da entre "para todo alumno hay un profesor al que admira" y "hay un profesor al que todo alumno admira".

Esto basta de momento para ilustrar las falacias de *ambigüedad formal*. Las falacias de *ambigüedad material* se deben a la ambigüedad de al-

guna de las expresiones no lógicas contenidas en las afirmaciones del argumento, que pueden tener más de un significado, como sucede p.e. con las palabras 'banco' y 'gato'. Si en una de las afirmaciones la palabra significa una cosa y en otra significa otra cosa diferente, el argumento puede ser inválido. Considérese el siguiente caso:

> "Algunos animales son gatos. Los gatos son metálicos. Por tanto, algunos animales son metálicos".

Este argumento tiene dos interpretaciones, que corresponden a los siguientes esquemas:

algunos *A* son *G*	algunos *A* son *G*
todos los *G* son *M*	todos los *T* son *M*
algunos *A* son *M*	algunos *A* son *M*

En la primera versión el argumento es formalmente válido, pero inadecuado materialmente al ser falsa la segunda premisa. Si alguien pretende que es adecuado materialmente, que las premisas son verdaderas, es porque está pensando en la segunda forma, pero entonces es inadecuado formalmente pues se trata de un esquema inválido. En estos casos se dice que se ha cometido una *falacia de equivocidad*. Falacias de equivocidad más sutiles, en las que muchas veces es difícil identificar el doble sentido de las expresiones utilizadas, abundan en filosofía (por ejemplo, en argumentos que confunden diversos sentidos de 'posible').

Las falacias de ambigüedad material se parecen a otro tipo de falacias materiales, las de *vaguedad* o *imprecisión*. Muchos argumentos inadecuados parecen adecuados porque contienen premisas imprecisas. Las premisas parecen aceptables justamente por su imprecisión, pero si no se precisan más el argumento es formalmente inválido. Por otro lado, si se precisan de modo que el argumento sea una inferencia válida, entonces las premisas ya no son aceptables. Mediante una argucia semejante algunos conservadores se oponían a la campaña que el gobierno español realizó a principios de los años noventa en favor del uso del preservativo para luchar contra la expansión del SIDA. Un representante del clero argumentó como sigue:

> "La campaña aumenta el uso del preservativo, pero también la promiscuidad sexual. El uso del preservativo disminuye el riesgo de contagio, pero el aumento de promiscuidad sexual favorece la expansión del SIDA. Por tanto, la campaña favorece el contagio del SIDA."

Así de vagas las premisas, parecen verdaderas. Pero con estas premisas, sin precisarlas más, el argumento es claramente inválido (es sencillo diseñar una situación en la que todas las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, cualquiera en la que el efecto positivo del preservativo supere el efecto negativo de la promiscuidad; diseñe el lector una situación tal como ejercicio). Por otro lado, se pueden hacer más precisas las premisas de modo tal que el argumento sea formalmente válido, pero la cuestión es

si entonces es materialmente adecuado, esto es, si en dicha interpretación más precisa las premisas siguen siendo verdaderas.

Tanto en las falacias por ambigüedad como en las de imprecisión, la estrategia de la falacia es la misma: Las premisas tienen dos interpretaciones. En la interpretación (más débil) en que las premisas son aceptables, el argumento es inválido. En la interpretación (más fuerte) en que el argumento es válido, las premisas no son aceptables. Sin embargo, se pretende que el argumento es bueno confundiendo la aceptación de las premisas en un caso con la validez del argumento en el otro.

NO ATINENCIA

Otro tipo de falacia se caracteriza porque las premisas son, de diversos modos, "no atinentes", insuficientes o irrelevantes para establecer la conclusión. No es claro si se trata de falacias en sentido estricto de 'argumentación', o si son más bien recursos no argumentativos para la persuasión. En cualquier caso son recursos muy usuales en muchas discusiones y polémicas pretendidamente argumentativas. Estas falacias se conocen por sus nombres latinos: *ad ignorantiam, ad hominem, ad verecundiam, ignoratio elenchi*.

En el argumento *ad ignorantiam* se pretende establecer cierta afirmación sobre el único fundamento de que no se ha demostrado que sea falsa. Algunos creyentes en la astrología defienden su tesis de que las posiciones astrales determinan el futuro de las personas apelando a que no se ha demostrado que no sea así. Pero, por supuesto, de la ausencia de prueba en contra sólo se sigue la (provisional) *posibilidad* de que la afirmación sea verdadera, no su verdad efectiva.

En los argumentos *ad hominem* se pretende establecer cierta afirmación atacando o desautorizando a quien defiende la contraria. Por ejemplo: "No hay un peligro real de desertización por efecto del agujero de ozono, pues ya se sabe que eso sólo lo defienden los ecologistas". Es claro que, sin premisas adicionales, estos argumentos son falaces pues, como decían los clásicos, las verdades son verdades aunque las diga el diablo.

Los argumentos *ad verecundiam* son en cierto modo opuestos a los anteriores. Estos argumentos son un caso degenerado de la *argumentación por autoridad*, esto es, de argumentos que apelan a la opinión de un experto en el tema, como por ejemplo: "el SIDA crece más en África que en Europa, lo ha dicho el presidente de la Organización Mundial de la Salud". A veces esos argumentos son legítimos, cuando está justificada la premisa implícita de que los juicios del experto sobre el tema en cuestión son correctos. Pero muchas veces la apelación a la supuesta autoridad carece de fundamento, son meras argucias, en cuyo caso estamos ante una falacia *ad verecundiam*.

La falacia *ignoratio elenchi* se produce cuando en un argumento que procede correctamente hacia determinada conclusión, se cambia al final la legítima conclusión por otra ilegítima diferente pero relacionada, unas

veces más general, otras más específica. El discurso social proporciona buenos ejemplos de ambos casos. Nos encontramos en el primer caso, por ejemplo, cuando en un argumento cuyas premisas establecerían correctamente que el consumo de heroína es pernicioso, se pretende concluir que el consumo de cualquier droga es pernicioso. Y en el segundo caso, por ejemplo, cuando en un argumento que concluiría válidamente que se debe rebajar el déficit se concluye que hay que subir los impuestos. Las conclusiones pretendidas no se siguen *sin premisas adicionales*.

PREMISAS OCULTAS

Para concluir, conviene distinguir los argumentos falaces de otros que, aunque en cierto sentido son "incompletos", no son incorrectos. Nos referimos a los argumentos con premisas ocultas o elípticas. En la mayoría de los argumentos que realizamos no explicitamos todas las premisas y dejamos que el contexto indique cuáles son las premisas elípticas que presuponemos. A estos argumentos, que se pueden completar adecuadamente explicitando premisas implícitas ocultas, se les denomina *entimemas*. Un ejemplo famoso lo proporciona cierta interpretación del *cogito* cartesiano: "Pienso, luego existo". Según esa interpretación, se trata de un entimema que tiene como segunda premisa, oculta, la afirmación "todo lo que piensa existe", siendo por tanto un argumento deductivo válido. Considérese el siguiente argumento:

> "El Estado no debe ser paternalista, sólo debe prohibir acciones individuales que tengan consecuencias directas o indirectas contra terceros. El consumo de drogas tiene consecuencias contra terceros. Algunas de esas consecuencias son producto de la penalización, como la delincuencia vinculada al tráfico ilegal, los robos para poder costearse el precio derivado de su prohibición, la degradación y coste del sistema carcelario, o la tensión internacional entre países productores y consumidores. En este aspecto la penalización es perjudicial. Otras consecuencias no se deben a la penalización, como la ruptura del medio familiar del adicto, su bajo rendimiento laboral, las acciones incontroladas bajo efectos de la droga, o la carga económica que representa para el sistema sanitario público. La penalización tiende a reducir el consumo y, con ello, este tipo de consecuencias, siendo pues beneficiosa en este aspecto. Pero los perjuicios de la prohibición son mayores que los que cabe esperar del aumento de consumo que se derivaría de la despenalización. Por tanto, hay que despenalizar el consumo, producción y venta de droga."

Independientemente de que pueda rechazarse por desacuerdo con alguna de las premisas, este argumento tiene toda la apariencia de ser formalmente correcto. Sin embargo, si lo formalizáramos resultaría un esquema inválido. El motivo es que no menciona explícitamente toda una serie de premisas que supone son compartidas por la audiencia del con-

texto. Si completamos el argumento con esas premisas ocultas, obtenemos un esquema válido. Hay que advertir, sin embargo, que este expediente no es siempre aceptable, pues, de lo contrario, todos los argumentos sería correctos. En efecto, todo argumento inválido, hasta el más descabellado, puede convertirse en válido si permitimos completarlo con las premisas adicionales necesarias. Como todo fenómeno pragmático, es difícil precisar cuál es el límite del uso legítimo de este recurso, pero ello no significa que no haya usos ilegítimos. Los entimemas se pueden en general considerar falaces o ilegítimos si las premisas ocultas no son claramente consideradas justificadas por la audiencia.

4. Niveles lógicos

En la sección 2 hemos dado una primera aproximación, intuitiva, del sentido en el cual la lógica deductiva es *formal*: la validez de un argumento depende de su forma o estructura. La forma o estructura lógica, dijimos, viene determinada por las partículas lógicas que contiene; se obtiene haciendo abstracción de las expresiones no lógicas y preservando las lógicas. Y avanzamos que son partículas lógicas expresiones del lenguaje como 'o', 'y', 'no', 'si ...entonces', 'algún', 'todos', 'ningún', ... Vamos a ver ahora que esas partículas no están todas en un mismo nivel lingüístico y que, atendiendo a esa diferencia de nivel, conviene dividir el estudio de la lógica deductiva en diversos estadios, progresivamente cada vez más complejos.

LÓGICA PROPOSICIONAL Y LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Consideremos el siguiente argumento:

A31 "Si Kennedy es reelegido o Kruschev no dimite, entonces habrá guerra. Kruschev no dimitirá. Por tanto, habrá guerra."

Este argumento es válido y su forma lógica es

si α o no β, entonces γ
no β

γ

Para obtener su forma lógica hemos hecho abstracción de las expresiones de las que no depende su validez, en este caso oraciones enteras, representadas por los "huecos" α, β y γ, y hemos mantenido las expresiones de las que depende su validez, las partículas lógicas. La idea es que si en A31 cambiamos, por ejemplo, siempre que aparece 'o' por 'y', podemos alterar su validez:

A32 "Si Kennedy es reelegido y Kruschev no dimite, entonces habrá guerra. Kruschev no dimitirá. Por tanto, habrá guerra."

Efectivamente, con ese cambio el argumento pasa a ser un argumento inválido. Así, la validez de A31 depende de que contenga 'o' del modo en que lo contiene (y semejantemente con 'no' y 'si ... entonces'). Contrariamente, su validez no depende de "qué digan" α, β y γ. Estas pueden ser afirmaciones cualesquiera; si con unas de ellas el argumento es válido, con las otras también. Por ejemplo, podemos cambiar 'Kruschev dimite' por 'todos los senadores votan favorablemente' y obtenemos

A33 "Si Kennedy es reelegido o no todos los senadores votan favorablemente, habrá guerra. No todos los senadores votarán favorablemente. Por tanto, habrá guerra."

que también es un argumento válido. O cambiar además 'Kennedy es reelegido' por 'algunos diputados se rebelan' y 'habrá guerra' por 'el gobierno caerá':

A34 "Si algunos diputados se rebelan o no todos los senadores votan favorablemente, entonces el gobierno caerá. No todos los senadores votarán favorablemente. Por tanto, el gobierno caerá."

y seguimos dando lugar a un argumento válido. Estos cambios no afectan a la forma lógica, que es la misma en los tres casos.

Como se habrá observado, la forma lógica depende ahora tan sólo de cómo estén conectadas ciertas afirmaciones simples, sin importar cuáles sean esas afirmaciones simples. La validez de A31, A33 y A34, y la invalidez de A32, dependen pues *sólo* de las conexiones entre afirmaciones simples, conexiones que realizan esas expresiones 'y', 'o', etc., que son por tanto partículas lógicas. Llamaremos 'lógica proposicional' al estudio de la validez de los *argumentos cuya validez depende sólo de las conexiones entre afirmaciones (proposiciones/enunciados) completas*. La lógica proposicional debe explicar o poner de manifiesto los motivos por los que ciertos esquemas argumentativos son válidos (como el común a A31, A33 y A34) y ciertos otros son inválidos (como el de A32).

Nótese que entre la lista de partículas lógicas que mencionamos antes se encontraban las expresiones 'algún', 'todos' y 'ningún'. Estas partículas no sirven para conectar enunciados entre sí, sino para conectar unas partes con otras dentro de los enunciados simples. Habíamos dicho que las partículas lógicas son aquellas expresiones de las que depende la validez/invalidez de los argumentos, pero no parece que la validez/invalidez de p.e. A34 dependa de partículas como 'algunos' o 'todos'. Si en A34 reemplazamos 'todos' por 'algunos', el nuevo argumento sigue siendo válido. Y con cualquier reemplazo de este tipo sucederá lo mismo, no afectará a su validez, pues esos reemplazos tienen el efecto de modificar el contenido de las afirmaciones simples, no las conexiones entre ellas, que como hemos visto es lo único de lo que depende su validez.

¿Quiere ello decir que expresiones como 'todos', 'algunos', etc. no son partículas lógicas? En absoluto. Lo único que se sigue de lo anterior es que la validez de *algunos* argumentos no depende de esas expre-

siones, sino *solamente* de las partículas que conectan afirmaciones enteras. Pero no todo argumento es tal que su validez depende sólo de las conexiones entre afirmaciones. Contemplemos el siguiente argumento:

A35 "Todos los filósofos prefieren la sabiduría al poder. Gorgias no prefiere la sabiduría al poder. Por tanto, Gorgias no es filósofo."

Este argumento es intuitivamente válido. Ahora bien, ¿depende su validez de las conexiones entre afirmaciones enteras? Si así fuese, su forma lógica se obtendría abstrayendo los enunciados simples; esto es, su forma lógica sería:

$$\alpha$$
$$\text{no } \beta$$

$$\gamma$$

Pero, a diferencia del esquema anterior, que "mostraba" por qué los argumentos que lo exhiben (A31, A33, A34) son válidos, este esquema no muestra por qué A35 es válido, pues es un *esquema proposicional inválido*. Así pues, si todo lo que pudiésemos hacer en lógica fuese estudiar la validez de argumentos cuya validez depende de las conexiones entre afirmaciones simples, nos encontraríamos con argumentos, como A35, que son intuitivamente válidos pero que resultarían inválidos. La conclusión, desde luego, no puede ser que A35 es inválido. El argumento A35 *es* válido. Que de acuerdo con su esquema proposicional no sea válido no quiere decir que después de todo el argumento no sea válido, sino que en este caso *el esquema proposicional no pone de manifiesto la estructura lógica relevante*. La conclusión es, pues, que la lógica proposicional tiene alcance limitado, sólo sirve para analizar la validez de un tipo de argumentos, pero no de todos.

Resumiendo: Si la validez de todos los argumentos dependiera sólo de conexiones entre afirmaciones completas, entonces A35 sería inválido. Pero A35 es válido. Así pues, hay argumentos, como A35, cuya validez no depende (sólo) de las conexiones entre enunciados.

En estos casos, la validez del argumento depende (además) *de la estructura interna de las afirmaciones simples*. La forma lógica relevante tiene entonces que poner de manifiesto esa estructura interna, que p.e. para A35 es

todos los *A* son *B*
a no es *B*

a no es *A*

Ahora sí, este esquema "muestra" que el argumento es válido. Nótese que ahora la forma depende de la aparición de la expresión 'todos'. Ello es así porque aquí la aparición de esa expresión sí que es relevante para la validez del argumento. Como se puede advertir fácilmente, la validez de A35 se ve afectada si sustituimos 'todos' por p.e. 'algunos':

A36 "Algunos filósofos prefieren la sabiduría al poder. Gorgias no prefiere la sabiduría al poder. Por tanto, Gorgias no es filósofo."

El argumento A36 es inválido, y su única diferencia respecto de A35 es que contiene 'algunos' en lugar de 'todos'. Eso quiere decir que su validez depende ahora de expresiones como 'todos' y 'algunos', expresiones que deben por tanto contar ahora como partículas lógicas y aparecer en la forma lógica. Lo mismo sucede con todos aquellos argumentos cuya validez depende de la estructura interna de las afirmaciones simples.

Llamaremos 'lógica de primer orden', o 'lógica de relatores', o 'lógica cuantificacional elemental' (los motivos de estas denominaciones se verán en la parte II) al estudio de la validez de *argumentos cuya validez depende de la estructura interna de los enunciados simples*, y por tanto de la función lógica de expresiones como 'todos' y 'algunos'. Nosotros estudiaremos primero la lógica proposicional y después la lógica de primer orden. Pero no se piense que se trata de dos lógicas "distintas". Como se pondrá de manifiesto en su momento, la lógica de primer orden (L1) incluye a la lógica proposicional (L0) como parte. Lo que vamos a hacer, por tanto, es estudiar la lógica de primer orden "por pasos". Primero veremos la parte más sencilla de la misma, la que estudia la validez de argumentos que dependen sólo de conexiones entre enunciados simples, y ampliaremos después ese estudio incluyendo el análisis de argumentos cuya validez depende (además) de la estructura interna de los enunciados simples.

L1

Estudio de un nivel lógico

Acabamos de ver que vamos a realizar nuestro estudio de la lógica en dos momentos o niveles, el de la lógica proposicional y, ampliándolo, el de la lógica de primer orden. Pero es importante saber que, justamente por tratarse de dos niveles de "lo mismo", el tipo de estudio que hemos de realizar es esencialmente el mismo. Sólo varía el grado de complejidad de dicho estudio, mucho mayor en la lógica de primer orden que en la proposicional. Lo que hay que estudiar en cada nivel lógico que nos encontremos es fundamentalmente lo siguiente.

El lenguaje

Cada uno de los niveles lógicos dispone de un lenguaje formal en el que expresar las afirmaciones que componen los argumentos que se van a analizar. Lo primero que hay que hacer al estudiar una lógica es, por tanto, presentar su lenguaje. Como en todo lenguaje, su presentación consiste básicamente en: (i) presentar la lista de signos primitivos del lenguaje, su alfabeto, y (ii) presentar las reglas gramaticales de formación de expresiones complejas, esto es, las reglas que establecen qué combinaciones de signos primitivos se consideran bien formadas y cuáles no. Puesto que en nuestro caso queremos aplicar los lenguajes formales al análisis de argumentos del lenguaje natural, incluiremos además (iii) la formalización de enunciados del lenguaje natural. Si podemos transcribir al lenguaje formal los enunciados que integran un argumento en lenguaje natural, cuando estudiemos la noción de validez en el lenguaje formal podremos aplicarla al análisis de argumentos del lenguaje natural.

La finalidad principal al estudiar un nivel lógico, una vez conocido su lenguaje formal, es analizar la noción de *validez*, esto es, dar un análisis de cuándo una afirmación (de ese lenguaje) *se sigue de* otras. Como dijimos en la segunda sección, la idea básica es que un argumento (deductivo) es *válido*, la conclusión *se sigue de* las premisas, cuando la información que proporciona la conclusión está "ya contenida" en la información que proporcionan las premisas conjuntamente consideradas. Pues bien, sucede que hay dos modos de desarrollar esta idea, el modo "semántico" y el modo algorítmico o "calculístico".[7]

Semántica formal

Según el análisis semántico de "seguirse de", una afirmación se sigue de otras cuando no es posible que éstas sean verdaderas y aquélla falsa. Este es el análisis que implícitamente presentamos en la sección 2 como especificación de la idea intuitiva. Y ya vimos entonces por qué era natural precisar así esa idea en términos de la posible verdad de premisas y conclusión: si una afirmación se sigue de otras cuando la información de éstas contiene a la información de aquélla, entonces no puede ocurrir que éstas sean verdaderas y aquélla falsa, por el simple motivo de que no puede ocurrir que cierta información sea verdadera y una "parte" suya sea falsa. Lo que deberemos hacer en cada uno de los niveles es presentar el aparato formal que nos permita precisar con todo ri-

7. A veces se denomina también 'sintáctico', para connotar que toma sólo en cuenta las conexiones de los signos entre sí. Nosotros no usaremos esta denominación porque reservamos 'sintaxis' para la gramática del lenguaje formal. Tampoco usaremos 'algorítmico' por tener connotaciones no deseadas derivadas de su uso en ciencias de computación. Aunque no sea muy elegante, usaremos el neologismo 'calculístico' para significar "correspondiente al cálculo deductivo".

gor este análisis semántico. Ello permitirá definir la noción clave de la semántica formal, que es la de *consecuencia lógica*, y otras nociones asociadas. El concepto de consecuencia lógica es el que va a expresar el *sentido semántico* de la noción intuitiva que hemos venido manejando de 'seguirse de'.

Cálculo deductivo

El análisis semántico, sin embargo, no es el único posible. Hay también un modo "calculístico" de expresar la idea de que una afirmación se sigue de otras. Según este otro sentido, una afirmación se sigue de otras si es posible *deducir* aquélla de éstas. Por 'deducir' se entiende aquí manipular las premisas de acuerdo con ciertas reglas que establecen qué manipulaciones son permisibles (las *reglas de inferencia*) hasta conseguir obtener la conclusión como resultado de aplicar las reglas un número finito de veces. Cada conjunto de reglas de inferencia es un *cálculo deductivo*. En relación a esas reglas, al cálculo, podemos definir el concepto de *deducibilidad*, que es el que proporciona el *sentido "calculístico"* de 'seguirse de'.

Metalógica

Tanto la noción de consecuencia lógica como la de deducibilidad no se podrán comprender cabalmente hasta que las veamos en detalle. Pero lo dicho debería bastar para haber dejado sorprendido al lector. ¿Cómo es que hay dos conceptos de "seguirse de", de "validez"? Como sugieren los comentarios anteriores, se trata en realidad de dos análisis diferentes de la misma noción preteórica intuitiva, y lo interesante es saber, si es posible, si ambos análisis, aunque diferentes, dan lugar al menos a los mismos resultados. Esto es, interesa saber si siempre que una afirmación se sigue de otras en uno de los sentidos se sigue también en el otro. De eso, entre otras cosas, se ocupa la metalógica. Dado el nivel introductorio de esta presentación, aquí nos limitaremos a presentar algunos resultados explicando su contenido, pero casi siempre sin dar pruebas de los mismos.

Quizás el lector se pregunte por qué es necesario dar dos análisis diferentes de la noción de validez. No es posible responder ahora a esta pregunta satisfactoriamente, pero baste la observación histórica de que casi siempre se ha comenzado, en un ámbito de la lógica (tanto en la lógica clásica, que presentamos aquí, como en las no clásicas, modal, temporal, etc.) por dar un cálculo deductivo. Las herramientas conceptuales necesarias para llevar a cabo el análisis semántico (que para muchos es el más "natural") suelen desarrollarse más tarde. Cuando se logra desarrollar el análisis semántico, importa entonces determinar si el cálculo dado previamente era satisfactorio, esto es, coincide en resultados con la semántica (después de todo, uno podría dar cualquier regla para un cálculo, y se supone que sólo algunas son "buenas").

5. Lenguaje objeto y metalenguaje

Concluiremos haciendo explícita una distinción que venimos usando implícitamente ya en este capítulo introductorio, y que usaremos por extenso en el resto de la obra. Se trata de la distinción entre *lenguaje objeto* y *metalenguaje*. Esta distinción se aplica cuando, como en nuestro caso, usamos un lenguaje para hablar de otro lenguaje.

Los lenguajes son determinadas entidades que se usan para "hablar de" cierto ámbito de la realidad. Ahora bien, los lenguajes mismos forman parte de la realidad y a veces podemos estar interesados en hablar de ellos. Pero para hablar de un lenguaje, como para hablar de cualquier otra cosas, debemos usar a su vez un lenguaje. Eso es lo que sucede en clases de idiomas, cuando se imparten, p.e. clases de alemán en español. El alemán es el lenguaje *del* que hablo y el español es el lenguaje *desde* el que hablo del alemán. Llamamos entonces *lenguaje objeto* al lenguaje del que hablamos (el alemán, en nuestro ejemplo) y *metalenguaje* al lenguaje que usamos para hablar del lenguaje objeto (el español, en nuestro ejemplo).

El lector habrá advertido, seguramente, que lenguaje objeto y metalenguaje no tienen por qué ser "lenguas" distintas. Por ejemplo, puedo dar clase de lengua española en español. Eso es cierto, pero eso no quiere decir que en ese caso lenguaje objeto y metalenguaje *coincidan*. En un sentido muy lato, coinciden sólo por ser "la misma lengua". Pero en otro sentido más estricto no coinciden y, lo que es más importante, no pueden coincidir. En efecto, si el metalenguaje habla del lenguaje objeto, entonces ha de tener palabras para nombrar las entidades de las que habla, exactamente igual que si usamos un lenguaje para hablar de un parte de la realidad constituida por entidades biológicas, necesitamos nombres para referirnos a las entidades biológicas de las que hablamos. Así pues, el metalenguaje necesita disponer de palabras con las que nombrar las entidades de que habla, que en este caso son entidades que constituyen el lenguaje objeto. Las entidades que constituyen el lenguaje objeto serán palabras, frases o, en general, expresiones lingüísticas. Así pues, el metalenguaje debe tener palabras, expresiones lingüísticas, para nombrar las expresiones linguísticas del lenguaje objeto. Para cada expresión lingüística del lenguaje objeto, el metalenguaje deberá tener otra que la nombre. Y también deberá tener sus propias expresiones para decir las cosas que quiera decir del lenguaje objeto. Así, por ejemplo, la siguiente palabra es una palabra del castellano-objeto:

(a) casa

Y podemos querer decir algo de ella, por ejemplo, que es o no es sinónima de otra. Eso lo decimos mediante una expresión lingüística del metalenguaje (una afirmación en este caso):

(b) casa no es sinónima de silla

Como se ve, el metalenguaje debe tener expresiones para nombrar expresiones del lenguaje objeto. Si eso es así, aunque lenguaje objeto y me-

talenguaje puedan, en un sentido lato y vago, ser "la misma lengua", en un sentido estricto no pueden ser nunca *el mismo lenguaje*. Un lenguaje es (al menos) un conjunto de recursos expresivos, palabras, frases o, en general expresiones lingüísticas. Siendo esto así, el conjunto de expresiones del metalenguaje nunca puede coincidir exactamente con el del lenguaje objeto, pues el metalenguaje tiene que tener nombres de las palabras del lenguaje objeto. Esos nombres de las palabras del lenguaje objeto, son expresiones del metalenguaje. Si el metalenguaje coincidiese exactamente con el lenguaje objeto, entonces esas expresiones del metalenguaje serían también expresiones del lenguaje objeto, y el metalenguaje requeriría entonces *otras* expresiones para nombrar a las anteriores. Es decir, si el metalenguaje fuese idéntico al lenguaje objeto, entonces no podría tener un nombre de cada expresión del lenguaje objeto. Eso es lo que se quiere decir cuando se afirma que el metalenguaje ha de ser *esencialmente más rico* que el lenguaje objeto.

Así pues, el metalenguaje ha de disponer de palabras para nombrar palabras del lenguaje objeto, nombres de nombres del lenguaje objeto. Cuando ambos lenguajes pertenecen a la misma lengua, a veces se utiliza el mismo signo como palabra del lenguaje objeto y como palabra del metalenguaje que nombra a la anterior. Eso es lo que hemos hecho en (a) y (b). Pero por lo general no es bueno usar como nombre de una palabra a la misma palabra, pues puede dar lugar a confusiones. Por ejemplo, nos pueden pedir que traduzcamos al catalán la oración

(c) vaso tiene más letras que ola

y quizás alguien se vea tentado a traducirla mediante

(d) vas te més lletres que ona

Aquí se ha producido una confusión, pues no puede ser que al traducir correctamente un enunciado de un lenguaje a otro el enunciado pase de ser verdadero a ser falso. La confusión se debe a que en (c) hemos usado ciertas palabras como nombres de ellas mismas, y al traducirlas las hemos tomado como nombres de otras cosas.

Para evitar este tipo de confusiones se suele acordar no nombrar a las palabras mediante ellas mismas sino mediante *otras* palabras, y se suele adoptar la convención de nombrar a una palabra anteponiéndole y postponiéndole una marca, por lo general una comilla. Así, siguiendo esta convención, (c) se debería escribir

(c') 'vaso' tiene más letras que 'ola'

cuya traducción catalana correcta es

(e) 'vaso' te més lletres que 'ola'

Como se observará, el catalán metalingüístico contiene nombres de palabras del lenguaje-objeto, esto es, nombres de palabras del español.

Pues bien, todo esto se aplica a nuestra tarea, ya que en los temas que siguen vamos a utilizar como metalenguaje el español para hablar de

ciertos lenguajes objetos (unas veces el lenguaje ordinario y otras un lenguaje formal). En realidad, como el lector quizás haya advertido, ya lo hemos estado haciendo en este tema introductorio. En efecto, lo hemos hecho, y lo hemos hecho guardando la mencionada convención, cuando en secciones anteriores hemos hablado, por ejemplo, de lo que sucede si sustituimos 'todos' por 'algunos' en determinado argumento. En adelante nos atendremos por lo general a dicha convención, salvo en algunas ocasiones en que queramos introducir un término especialmente importante, en cuyo caso usaremos a veces cursivas en lugar de comillas. También, en algunas otras ocasiones, cuando los signos o expresiones que queramos nombrar sean de una notación simbólica especial, se usen en contextos que no den lugar a confusiones y ponerles comillas haga engorrosa la escritura, prescindiremos de las comillas. Por ejemplo, en lugar de

(f) el condicional '$\rightarrow$' es el signo dominante en la fórmula '$(p \wedge q) \rightarrow r$'

escribiremos casi siempre

(g) el condicional $\rightarrow$ es el signo dominante en la fórmula $(p \wedge q) \rightarrow r$

Primera parte

LÓGICA PROPOSICIONAL

CAPÍTULO 2

EL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Hemos visto en la introducción que la lógica proposicional se ocupa del análisis de la validez de un cierto tipo de argumentos, aquellos argumentos cuya validez o invalidez depende *sólo* de las *conexiones entre enunciados*. Argumentos como el siguiente:

Hume es empirista o racionalista
Si Hume es racionalista entonces acepta necesidades metafísicas
Pero Hume no acepta ningún tipo de necesidad metafísica

Hume es empirista

Los argumentos cuya validez depende (además) de las estructura interna de los enunciados simples serán estudiados más adelante. En el nivel en que ahora nos situamos, por tanto, los enunciados simples van a permanecer "opacos", sin analizar. Como anunciamos, vamos a realizar el estudio de este nivel lógico en cuatro pasos:

En primer lugar, en este capítulo presentaremos el lenguaje formal y nos familiarizaremos con él formalizando algunos enunciados del lenguaje natural.

En segundo lugar (cap. 3), presentaremos el análisis "semántico" de la noción de *seguirse de* mediante el concepto de *consecuencia lógica* (y los relacionados de *verdad lógica* y *equivalencia lógica*) y lo aplicaremos al estudio de la validez de argumentos del lenguaje natural.

En tercer lugar (cap. 4), presentaremos el análisis "calculístico" de la noción del *seguirse de* mediante el concepto de *deducibilidad* (y los relacionados de *teorema lógico* e *interdeducibilidad*) y lo aplicaremos a la comprobación de la validez de argumentos en lenguaje natural.

Por último (cap. 5), veremos cuáles son las principales relaciones que mantienen entre sí estos dos modos de analizar la noción de *seguirse de* en el nivel proposicional.

La presentación de un lenguaje formal consiste básicamente en (i) presentar los signos primitivos del lenguaje, su alfabeto, y (ii) especificar cómo se pueden combinar los signos del alfabeto para dar lugar a expresiones lingüísticas bien formadas, esto es, dar su gramática. Como en nuestro caso queremos aplicar el lenguaje formal a la reconstrucción de la

estructura lógica del lenguaje natural, incluiremos un tercer apartado correspondiente a la formalización del lenguaje natural en el nivel proposicional.

1. Alfabeto: Signos primitivos

El lenguaje proposicional sirve para reconstruir la estructura del lenguaje natural en lo que respecta al modo como están conectados los enunciados simples conformando enunciados complejos. Eso quiere decir que el alfabeto constará básicamente de dos tipos de signos:

— signos para representar los enunciados simples,
— signos para representar las conexiones entre enunciados simples.

Como veremos, serán también necesarios otro tipo de signos, los paréntesis, que son signos auxiliares para agrupar enunciados complejos o moleculares. Así pues, nuestro alfabeto consta de los siguientes signos.

Constantes no lógicas: letras proposicionales

Son los signos para representar los enunciados simples.[1] A veces se denominan también 'letras sentenciales' o 'letras enunciativas'. Como letras proposicionales, usaremos las letras penúltimas del abecedario en minúscula:

$p, q, r, \ldots;$

o, si queremos tener una serie ilimitada, utilizaremos la p seguida de subíndices:

$p_1, p_2, p_3, \ldots$

Por comodidad notacional, y puesto que no usaremos un gran número de letras proposicionales al mismo tiempo, aquí seguiremos la primera opción.

Constantes lógicas: conectivas

Son los signos para representar las conexiones entre enunciados . A veces se denominan también 'conectores'. Más adelante (cap. 3 sec. 5)

1. En realidad, desde un punto de vista puramente formal, las letras proposicionales pueden representar enunciados/proposiciones cualesquiera, ya sean simples o complejos. Es en su aplicación al análisis de argumentos en lenguaje natural, que las letras proposicionales están por enunciados simples del lenguaje natural (al menos así será en los ejemplos de argumentos, relativamente sencillos, con los que aquí vamos a trabajar; cuando los argumentos son muy complejos, en su análisis se pueden usar letras sentenciales para representar enunciados complejos del lenguaje natural).

discutiremos si son todos necesarios, y si es así, en qué sentido; de momento presentamos la lista de las cinco conectivas estándar con cuya ayuda se pueden obtener los diferentes tipos de conexiones entre enunciados simples del lenguaje natural. Indicamos entre paréntesis su lectura más inmediata, y dejamos otras variantes para cuando veamos la formalización.

Negador:	$\neg$	(lectura: "no ...")
Conyuntor:	$\wedge$	(lectura: "... y ...")
Disyuntor:	$\vee$	(lectura: "... o ...")
Condicional:	$\rightarrow$	(lectura: "si ... entonces ...")
Bicondicional:	$\leftrightarrow$	(lectura: "... si y sólo si ...")

Quizá el lector atento piense que no todos son necesarios, por ejemplo el último. Después de todo, parece que "tal si y sólo si cual" es lo mismo que "si tal entonces cual, y si cual entonces tal", por lo que el bicondicional sería equivalente a la conyunción de dos condicionales invertidos, y por tanto prescindible. Este es el tipo de consideraciones que vamos a dejar para más adelante. De momento, como hemos indicado, operaremos con estas cinco conectivas.

SIGNOS AUXILIARES

Son signos que, dadas las reglas gramaticales que vamos a usar, nos sirven de ayuda para indicar qué conector, cuando hay varios, es el central o dominante en los enunciados complejos. En el lenguaje natural se utilizan para ello los signos de puntuación (p.e. "Juan aprobará matemáticas y física, o química", por contraposición a "Juan aprobará matemáticas, y física o química"); nosotros usaremos en nuestro lenguaje formal los paréntesis:

)
(

ALFABETO DE L0

Letras proposicionales:		$p, q, r, \ldots$
Conectivas:	negador	$\neg$
	conyuntor	$\wedge$
	disyuntor	$\vee$
	condicional	$\rightarrow$
	bicondicional	$\leftrightarrow$
Paréntesis:		), (

Estos son los signos del alfabeto de nuestro lenguaje propiamente dicho, aquellos que vamos a usar para construir enunciados de nuestro lenguaje proposicional. Ahora bien, en nuestra tarea vamos a tener que utilizar otros signos adicionales, no para escribir o usar enunciados (simples o complejos) del lenguaje proposicional, sino para *hablar de* ellos. Recuerde el lector la distinción entre lenguaje-objeto y metalenguaje

que vimos en la introducción. Los signos que hemos introducido hasta aquí son pues signos del lenguaje proposicional, es decir, del lenguaje-objeto. Para hablar del lenguaje (y de la lógica) proposicional usamos como metalenguaje el lenguaje natural, en nuestro caso el español. Pero además del lenguaje natural necesitamos un tipo de signos metalingüísticos adicionales, las *variables metalingüísticas* o *metavariables*. Necesitamos estos signos porque queremos decir cosas del lenguaje-objeto, de sus enunciados, de modo general. Necesitamos poder decir, por ejemplo, cosas como (a) "si ... y ... son dos secuencias de signos que constituyen enunciados bien formados, entonces el resultado de escribirlos seguidos con el condicional en medio es también un enunciado correctamente formado", o como (b) "si ... es una tautología, entonces ¬ ... es una contradicción". Y necesitamos decir eso de *enunciados cualesquiera*, no sólo de uno en concreto. Para hablar indistintamente de enunciados del lenguaje proposicional en general usaremos *variables metalingüísticas* o, abreviadamente, *metavariables*.

* METAVARIABLES

Como acabamos de indicar, son los signos que usamos en el metalenguaje para referirnos a enunciados cualesquiera del lenguaje-objeto. Usaremos las letras griegas

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ o también $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Ahora, expresaríamos (a) y (b) del siguiente modo: "si α y β son dos secuencias de signos que son enunciados bien formados, entonces la secuencia $\alpha \rightarrow \beta$ también es un enunciado bien formado", y "si α es una tautología entonces $\neg\alpha$ es una contradicción".

Nótese que las secuencias de signos como $\alpha \rightarrow \beta$, o cualquiera que incluya metavariables, no van a ser expresiones del lenguaje-objeto, enunciados del lenguaje proposicional, sino *esquemas* de tales enunciados.

Una vez especificado el alfabeto, presentaremos ahora la gramática o sintaxis, esto es, las reglas que establecen qué combinaciones de signos se van a considerar bien formadas, significativas (el lector habrá adivinado que para formular tales reglas usaremos precisamente metavariables).

2. Gramática: Reglas de formación de fórmulas

Debemos especificar aquí cómo se forman enunciados complejos a partir de enunciados más simples y conectivas (con ayuda de paréntesis). Esto es, debemos determinar qué secuencias o series de letras enunciativas, conectivas y paréntesis se consideran expresiones complejas bien formadas, *enunciados moleculares*. En adelante (y para unificar la termino-

logía con la que utilizaremos en lógica de primer orden) vamos a llamar 'fórmulas' a las expresiones bien construidas del lenguaje proposicional. Debemos pues aquí dar las reglas de formación de fórmulas, reglas que definen qué series de signos, como por ejemplo

$p\leftrightarrow)\vee q$
$pq\neg\wedge($
$(p\rightarrow q)\wedge\neg r$
$p\rightarrow q\leftrightarrow r$
$(((p \rightarrow q)\wedge\neg(r\vee s))\leftrightarrow\neg(q\rightarrow\neg s))$

están correctamente formadas, esto es, son fórmulas.

Las reglas de formación de fórmulas tienen algunos aspectos convencionales. Podemos, p.e. elegir escribir la conyunción de dos fórmulas, la combinación de dos secuencias a, b con el conyuntor Ÿ, en vertical, en horizontal, en ángulo recto o como queramos. Y si elegimos escribirla horizontalmente, todavía tenemos varias opciones arbitrarias, por ejemplo

$\wedge\alpha\beta$
$\alpha\wedge\beta$
$\alpha\beta\wedge$

Pero no todo es convencional. No es convencional que el negador se aplica a fórmulas individuales, esto es, que se aplica a *una* fórmula para dar otra. O que el conyuntor se aplica a pares de fórmulas, esto es, que se aplica a *dos* fórmulas para dar otra. A las conectivas que se aplican a una única fórmula para dar otra se las llama *monarias*, y a las que se aplican a dos fórmulas para dar otra se las llama *binarias*. De nuestras cinco conectivas, sólo $\neg$ es monaria, las restantes, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ son binarias. Bajo la condición de que respetemos eso, podemos estipular qué forma específica ha de tener la secuencia correcta de signos como queramos. Nosotros vamos a elegir la práctica común: anteponer el negador a la izquierda de la fórmula a la que se aplica y interponer las conectivas binarias entre las dos fórmulas a las que se aplican (esto es, la segunda de las tres opciones ejemplificadas con el conyuntor). Pero podríamos haber elegido otra alternativa, p.e. anteponer también las conectivas binarias a la secuencia formada por las dos fórmulas a que se aplican (esto es, primera de esas tres opciones). Así es como se hace en *notación polaca*. La notación polaca tiene la ventaja de que no requiere el uso de paréntesis, pero es de muy engorrosa lectura. Nosotros usaremos la notación estándar, de más fácil manejo aunque, como contrapartida, requiere usar paréntesis (cuando vea las reglas, piense el lector por qué la notación polaca no necesita paréntesis). Veamos ya cuáles son esas reglas sintácticas.

REGLAS DE FORMACIÓN DE FÓRMULAS

(i) Toda letra enunciativa sola es una fórmula.
(ii) Si α es fórmula, entonces la secuencia $\neg\alpha$ es fórmula.

(iii) Si α y β son fórmulas, entonces las secuencias $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ y $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ son fórmulas.
(iv) Sólo son fórmulas las secuencias que satisfacen alguna de las cláusulas anteriores.

Como indicamos, las metavariables están por secuencias de signos. Así, por ejemplo, la regla de la negación se lee: "si una secuencia de signos es fórmula, esto es, está bien formada, entonces la secuencia resultante de anteponer a la primera secuencia el signo $\neg$ también se considera bien formada, también es fórmula". Y la de la conyunción: "si dos determinadas secuencias de signos son fórmulas, entonces la secuencia que comienza por un paréntesis abierto, seguido de una las secuencias originales, seguida del signo $\wedge$, seguida de la otra secuencia original y que acaba con el paréntesis cerrado, también es fórmula, también está bien formada".

Note el lector que la cláusula (iv) es necesaria para que podamos decir, no sólo que una secuencia de signos es fórmula cuando lo es, sino también que una secuencia no es fórmula cuando no lo es. En efecto, la secuencia

$\neg(p\wedge q)$

es fórmula: las secuencias p y q son ambas fórmulas por (i), la secuencia $(p\wedge q)$ es fórmula por (iii), y la secuencia $\neg(p\wedge q)$ es entonces fórmula por (ii). La secuencia

$\neg(p\wedge q$

no es fórmula, pero sin la cláusula (iv) no podríamos decir que no lo es. No satisface ni la cláusula (i) ni la (ii) ni la (iii), no podemos decir que es fórmula, pero ello no es suficiente para poder decir que no lo es. Para ello necesitamos una cláusula de "cierre" que diga "y sólo esas secuencias son fórmulas". Ahora sí, si alguna secuencia no satisface ni (i) ni (ii) ni (iii) entonces (iv) nos permite decir que no es fórmula.[2]

La definición que hemos dado es una definición *recursiva*. Establece cuáles son los casos básicos o simples de fórmulas (cláusula (i)) y establece además cómo obtener casos complejos a partir de otros *más simples* (cláusulas (ii) y (iii)). Estos *más simples* (las αs y βs de estas cláusulas) no tienen por qué ser siempre *totalmente simples*, letras enunciativas solas, pueden ser también complejos. En ese caso se les vuelve a aplicar alguna de las cláusulas (ii) o (iii). Y así sucesivamente, hasta llegar a casos totalmente simples. Los casos "totalmente simples", las letras enunciativas solas, son las fórmulas *atómicas*, y los complejos son las fórmulas *moleculares* (aquí, y en adelante, usaremos 'syss' como abreviattura de 'si y sólo si'):

2. Este procedimiento para "cerrar" la definición no es plenamente satisfactorio, presenta ciertas dificultades formales, pero basta a los actuales efectos; una definición formal completamente adecuada excede los límites de esta presentación.

α es una *fórmula atómica* syss a es una letra enunciativa sola,
α es una *fórmula molecular* syss a es una fórmula no atómica.

Veamos ahora cómo la definición permite decidir, para una secuencia de signos cualquiera, si está o no bien formada. Para ello hay que analizar la secuencia "de fuera a adentro": cuando hay más de una conectiva, se identifica con ayuda de los paréntesis cuál es la dominante (si los paréntesis no permiten tal cosa, la secuencia estará mal formada); una vez identificada la conectiva dominante, se determina si satisface la correspondiente cláusula y se aplaza la respuesta hasta disponer de la respuesta para cada una de las partes (nótese que, de acuerdo con las reglas, toda fórmula ha de empezar, o bien por una letra enunciativa, o bien por un negador, o bien por un paréntesis).

EJEMPLO: $(\neg(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r))$

Para determinar si es fórmula, identificamos primero la conectiva dominante. La conectiva dominante viene determinada por la disposición de los paréntesis: es la conectiva que, dada la disposición de los paréntesis, domina a las demás conectivas, esto es, el resto de conectivas ocurren en secuencias que ella conecta. En este ejemplo, la conectiva dominante es el condicional. Esta secuencia es del tipo $(\alpha \rightarrow \beta)$, siendo α la secuencia $\neg(p \vee q)$ y siendo β la secuencia $(q \wedge r)$. Por (iii), la secuencia original será fórmula si estas dos secuencias lo son. La secuencia $\neg(p \vee q)$ es del tipo $\neg\gamma$, y por (ii) será fórmula si la secuencia γ, esto es, $(p \vee q)$, es fórmula. Y la secuencia $(p \vee q)$ es fórmula, pues es de la forma $(\varphi \vee \mu)$, siendo φ y μ ambas letras enunciativas solas y por tanto fórmulas (por (i)). Por otro lado, la secuencia β, esto es $(q \wedge r)$, también es fórmula, pues es de la forma $(\delta \wedge \phi)$ y δ y ϕ son, por (i), fórmulas al ser letras enunciativas solas. Así pues, tanto α como β son fórmulas, y con ello la secuencia original $(\alpha \rightarrow \beta)$ también lo es. Y se procede análogamente en todos los casos, la única diferencia es en complejidad.

EJEMPLO: $(((p \rightarrow q) \wedge \neg (r \vee s)) \leftrightarrow \neg (q \rightarrow \neg s))$

Para determinar si es fórmula, se identifica primero la conectiva dominante, que en este caso, de acuerdo con la disposición de los paréntesis, es el bicondicional. Esta secuencia es del tipo $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, siendo α la secuencia $((p \rightarrow q) \wedge \neg(r \vee s))$ y siendo β la secuencia $\neg(q \rightarrow \neg s)$. Por (iii), la secuencia original será fórmula si estas dos secuencias lo son. α a su vez es de la forma $(\gamma \wedge \delta)$, siendo γ la secuencia $(p \rightarrow q)$ y δ la secuencia $\neg(r \vee s)$. La secuencia $(p \rightarrow q)$ es fórmula, pues es de la forma $(\varphi \rightarrow \mu)$, siendo φ y μ ambas letras enunciativas solas y por tanto fórmulas (por (i)). La secuencia $\neg(r \vee s)$ es de la forma $\neg\phi$, y por tanto (cláusula (ii)) será fórmula si ϕ lo es. Pero ϕ es la secuencia $(r \vee s)$, que es fórmula de acuerdo con (iii) y (i). Así pues, α es fórmula. El lector debe comprobar que un razonamiento análogo muestra que β también lo es. Por tanto, la secuencia original es fórmula.

Subfórmulas: denominaremos 'subfórmulas' de una fórmula a todas las fórmulas (diferentes de ella) que la compongan. Así, son subfórmulas de $(\neg(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r))$ las siguientes fórmulas: $\neg(p \vee q)$; $(q \wedge r)$; $(p \vee q)$; p; q; r. Determine el lector las subfórmulas del segundo ejemplo.

Podemos reconstruir el anterior proceso de decisión de la siguiente manera. En primer lugar identificamos las diversas piezas de la secuencia hasta llegar a las más pequeñas. En nuestro primer ejemplo:

$$(\neg(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r))$$

Y vemos a continuación si podemos reconstruir el camino inverso obteniendo fórmulas mediante cláusulas de la definición (el signo 'f' bajo una secuencia indica que la secuencia es fórmula, y el signo 'nf' indica que no lo es):

$$(\neg(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r))$$

f f f f

f f

f

fórmula

En el caso de nuestro segundo ejemplo tenemos:

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg(r \vee s)) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow \neg s))$$

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg(r \vee s)) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow \neg s))$$

f f f f f f

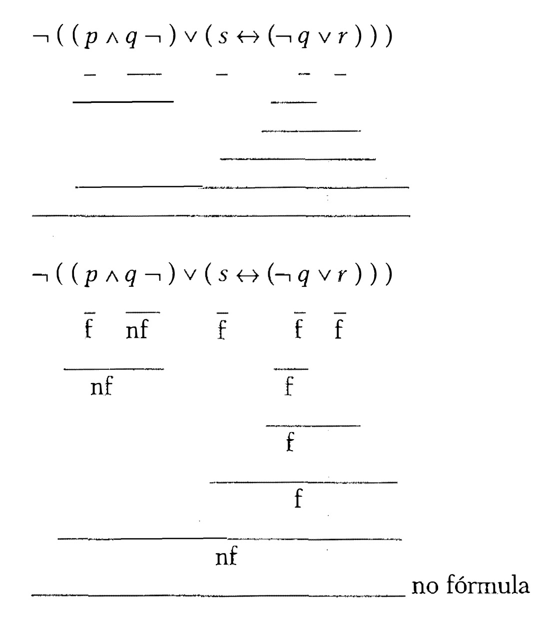
f f f

f f

f f

fórmula

Es fácil ver que este procedimiento permite establecer también cuándo una secuencia no es fórmula, por ejemplo: $\neg((p \wedge q\neg) \vee (s \leftrightarrow (\neg q \vee r)))$



Después de estos ejemplos, el lector ya debe haber comprendido por qué es necesario el uso de paréntesis. Si no usásemos paréntesis, la secuencia

$(((p \rightarrow q) \wedge \neg (r \vee s)) \leftrightarrow \neg (q \rightarrow \neg s))$

tendría el siguiente aspecto

$p \rightarrow q \wedge \neg r \vee s \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg s$

y sería imposible determinar cuáles son las conectivas dominantes en cada caso. O, en un ejemplo más sencillo, la secuencia

$\neg p \rightarrow r \leftrightarrow q$

sería ambigua, podría significar (desambiguándola mediante paréntesis) alguna de las cinco cosas siguientes:

$(\neg (p \rightarrow r) \leftrightarrow q)$
$(\neg p \rightarrow (r \leftrightarrow q))$
$((\neg p \rightarrow r) \leftrightarrow q)$
$\neg (p \rightarrow (r \leftrightarrow q))$
$\neg ((p \rightarrow r) \leftrightarrow q)$

Los paréntesis son pues necesarios para desambiguar su interpretación. Ahora bien, quizás no todos sean imprescindibles. En estos ejemplos, vemos que los tres primeros tienen paréntesis externos que no tienen ninguna utilidad. Si los suprimiéramos no causaríamos ninguna confusión o ambigüedad en la interpretación:

$\neg (p \rightarrow r) \leftrightarrow q$
$\neg p \rightarrow (r \leftrightarrow q)$
$(\neg p \rightarrow r) \leftrightarrow q$

Así, aunque los paréntesis son necesarios ante la posibilidad de interpretaciones diferentes, cuando no haya tal peligro podríamos prescindir de ellos. En ese caso es mejor suprimirlos, pues un exceso de paréntesis hace que la lectura de la fórmula sea muy engorrosa. Vamos a ver en qué casos se pueden suprimir.

SIMPLIFICACIÓN DE PARÉNTESIS

(a) Paréntesis externos

Podremos suprimir siempre los dos paréntesis externos, de apertura y clausura, cuando los haya.

(b) Secuencias de conyuntores/disyuntores

A veces, dos interpretaciones que corresponden a escrituras con diferentes paréntesis son en realidad sólo aparentemente diferentes. "Aparentemente" en el sentido de que, aunque son fórmulas diferentes, "dicen lo mismo". Esto es, ambas lecturas son "equivalentes". No podemos ver el sentido preciso de 'equivalentes' hasta el próximo capítulo (sec. 4), pero bastará por el momento con las intuiciones del lector. La idea es que las dos fórmulas (omitimos ya los paréntesis externos en virtud de (a))

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

"dicen lo mismo". Por tanto, ante una secuencia sin paréntesis del tipo $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, sería indiferente, "en cuanto a lo que se dice", elegir una u otra interpretación. Por tanto, podemos prescindir de los paréntesis sin afectar el contenido. Y así lo haremos.

Con la disyunción ocurre lo mismo. Tanto la conyunción como la disyunción son conectivas *asociativas*: los diversos modos de agrupar las partes componentes de una serie de conyunciones, y los diversos modos de agrupar las partes componentes de una serie de disyunciones, son equivalentes. Vamos a permitir entonces suprimir los paréntesis en las series de disyunciones y de conyunciones. Así, por ejemplo, la secuencia

$(((p \wedge q) \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee (\neg p \vee r)))$

se puede simplificar, atendiendo a (a), obteniéndose

$((p \wedge q) \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee (\neg p \vee r))$

y atendiéndonos a este nuevo criterio (b), podemos seguir simplificándola hasta obtener

$(p\wedge q\wedge\neg r)\rightarrow(q\vee\neg p\vee r)$

(c) Dominancia

Algunos textos de lógica permiten simplificaciones adicionales estipulando ciertas convenciones sobre dominancias entre conectivas. Podríamos estipular, por ejemplo, que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ son "más fuertes" que $\wedge$ y $\vee$ (y que dentro de cada par ambas son de igual fuerza). Por 'más fuerte' se entiende simplemente que si los paréntesis no indican lo contrario, en una secuencia con p. e. $\wedge$ y $\rightarrow$ la conectiva dominante es $\rightarrow$. Así, según esta convención, en la segunda de las fórmulas

$p \wedge (q \rightarrow \neg r)$
$(p \wedge q) \rightarrow \neg r$

podríamos suprimir los paréntesis, puesto que de acuerdo con la convención, en la secuencia

$p \wedge q \rightarrow \neg r$

el condicional domina sobre el conyuntor. Esta convención nos permitiría simplificar las fórmulas

$(p\wedge q\wedge\neg r)\rightarrow(q\vee\neg p\vee r)$
$((p \rightarrow q)\vee\neg r)\leftrightarrow(\neg q\wedge s)$

del siguiente modo:

$p\wedge q\wedge\neg r \rightarrow q\vee\neg p\vee r$
$(p \rightarrow q) \vee\neg r \leftrightarrow \neg q\wedge s$

Aunque algunos manuales de lógica la usan, no seguiremos sin embargo aquí esta convención.

EJERCICIOS: 1 al 10

3. Formalización del lenguaje natural

Vamos a ver ahora cómo aplicar este lenguaje formal para hacer explícita la estructura lógica de enunciados del lenguaje natural en el nivel proposicional. Aunque su aplicabilidad para la argumentación es relativa, pues no hay muchos argumentos interesantes en este nivel proposicional, la formalización nos va a permitir familiarizarnos con el uso de las conectivas y, como dijimos, sirve de preámbulo a la lógica de primer orden.

No hay reglas automáticas para formalizar enunciados del lenguaje natural. Hay que "ver" lo que el enunciado dice y "traducir" después eso al lenguaje formal. Todo lo que podemos decir es que al formalizar un enunciado complejo del lenguaje natural debemos siempre:

(a) identificar los enunciados simples componentes
(b) asignar a cada enunciado simple una letra enunciativa
(c) reconstruir la estructura del enunciado con las letras enunciativas y las conectivas.

A partir de ahora, utilizaremos el signo '≡' para indicar que un signo del lenguaje formal formaliza cierta expresión del lenguaje natural (y también, más adelante, para indicar que en un contexto específico cierta metavariable toma cierto valor).

EJEMPLO: Si Juan va a la fiesta entonces Luis no vá
$p\equiv$ Juan va a la fiesta
$q\equiv$ Luis va a la fiesta
Formalización: $p\rightarrow\neg q$

Aunque no hay reglas automáticas, sí es posible, y conveniente, dar algunas indicaciones generales. Las principales tienen que ver con la naturaleza de las proposiciones simples; los usos más comunes de las conectivas; la vaguedad; y las formalizaciones alternativas equivalentes.

ENUNCIADOS SIMPLES DEL LENGUAJE NATURAL

La idea intuitiva es que un enunciado simple es un enunciado que no tiene otro enunciado como parte. Por ejemplo, el enunciado 'María llamó el lunes y Rosa el domingo' no es simple, pero tampoco lo es, como hemos visto, 'Luis no viene a la fiesta', pues tiene como parte el enunciado 'Luis viene a la fiesta' y es el resultado de aplicar el negador a este enunciado. Ahora bien, no en todos los casos en que un enunciado del lenguaje natural tiene otro como parte vamos a considerar al enunciado un enunciado molecular. Por ejemplo, 'María cree que Luis vendrá a la fiesta' contiene el enunciado 'Luis vendrá a la fiesta' como parte y sin embargo no lo vamos a considerar molecular sino simple. Estos casos raros se distinguen de los verdaderamente moleculares en que no contienen ninguna conectiva. Así, los enunciados que vamos a considerar simples van a ser aquellos que no contienen conectivas, ni explícita ni implícitamente ('Juan vino, María también' contiene implícitamente una conectiva, el conyuntor).

INTERPRETACIONES USUALES DE LAS CONECTIVAS

Vamos a dar a continuación algunas construcciones características del lenguaje natural y su expresión formal más usual (en espera de lo que digamos sobre vaguedad).

'α y β', 'α pero β', 'α aunque β', 'α y sin embargo β', 'α a pesar de β': $\alpha\wedge\beta$

Todas las partículas conjuntivas del lenguaje natural se transcriben igual. No es que no haya diferencias entre ellas. Sí que las hay. Algunos

usos de 'pero' p.e. sugieren que la audiencia espera que si ocurre α no ocurra β, y algunos usos de 'aunque' sugieren que si ocurre β se espera que no ocurra α. Pero estas diferencias no son diferencias en el contenido lógico del lenguaje. Si en un argumento cambiamos 'y' por 'pero' o 'aunque', la validez o invalidez del argumento no se ve afectada.

'si α entonces β', 'si α, β', 'α, sólo si β', 'α es suficiente para β', 'α implica β', 'α causa β':
$\alpha\rightarrow\beta$

'α es necesario para β', 'α, si β', 'α porque β':
$\beta\rightarrow\alpha$

Debemos hacer aquí una observación importante sobre el condicional. El condicional que usamos aquí corresponde a la *implicación material*. Muchos usos de algunas de estas expresiones condicionales, sin embargo, expresan en el lenguaje natural una implicación más fuerte que la que recoge la implicación material. Eso sucede con expresiones de estos ejemplos como 'implica', 'causa', 'es necesario para' o 'porque', y también con condicionales subjuntivos del tipo 'si ocurriese α ocurriría β'. Para dar cuenta de estos casos, en los que el condicional material no parece recoger todo el contenido lógico, se desarrollan diversos instrumentales lógicos que dan lugar a algunas lógicas no clásicas (modales, de la relevancia, ...). Nosotros no vamos a ver aquí tales recursos.[3]

'α si y sólo si β', 'α en el caso, y sólo en el caso, que β', 'α equivale a β', 'α es necesario y suficiente para β':
$\alpha\leftrightarrow\beta$

'α o β', 'α a menos que β':
$\alpha\vee\beta$

Este es el sentido *inclusivo* de la disyunción. En este sentido, la disyunción significa que al menos una de las dos cosas sucede, pero es compatible con que sucedan las dos. Hay otro sentido con el que se quiere significar que al menos una de las opciones sucede, pero que sólo sucede una. Este es el sentido *exclusivo* de la disyunción. Casi siempre que se usa la locución 'o tal o cual' se usa en ese sentido:

'o α o β':
$(\alpha\vee\beta) \wedge \neg(\alpha\wedge\beta)$

'ni α ni β':
$\neg\alpha \wedge \neg\beta$

'α no implica β':
$\neg(\alpha\rightarrow\beta)$

3. Para una introducción elemental clara a los mismos, puede consultarse el cap. 3 del libro de D. Quesada *La lógica y su filosofía* (Barcanova, Barcelona 1985).

A veces parece que hay más de una opción "igualmente correcta" para formalizar un enunciado del lenguaje natural. Eso puede querer decir dos cosas. O bien es que hay dos modos diferentes de interpretar el enunciado en lenguaje natural, es decir, es un enunciado ambiguo. O bien sólo se interpreta de un modo pero hay más de una forma de expresar ese contenido al lenguaje formal. Veamos ambas posibilidades. Comenzaremos por la segunda.

FORMALIZACIONES EQUIVALENTES

Acabamos de transcribir la disyunción exclusiva (cuya interpretación pretendida ahora está clara) mediante $(\alpha\vee\beta) \wedge \neg(\alpha\wedge\beta)$, pero también podríamos haberla transcrito mediante $(\alpha\vee\beta) \wedge (\neg\alpha\vee\neg\beta)$, o mediante $\alpha\leftrightarrow\neg\beta$. Todas estas fórmulas "dicen lo mismo", son *equivalentes*. El sentido preciso en que son equivalentes no lo podemos ver hasta más adelante (cap. 3 sec. 4); por ahora bastará con las intuiciones del lector, que seguramente le dirán p.e. que "sucede alguna de las dos pero no las dos" dice lo mismo que "alguna de las dos cosas sucede y la otra no".

Antes hemos formalizado 'α a menos que β' mediante $\alpha\vee\beta$, pero quizás a algún lector le haya parecido que la formalización debía ser $\neg\beta\to\alpha$, o quizás $\neg\alpha\to\beta$. Pues bien, de nuevo no son cosas diferentes, todas esas formalizaciones son equivalentes. Lo mismo ocurre con 'ni a ni b', que hemos formalizado mediante $\neg\alpha\wedge\neg\beta$, pero podríamos haberlo hecho de forma equivalente mediante $\neg(\alpha\vee\beta)$.

A veces no es tan sencillo ver intuitivamente que dos formalizaciones son equivalentes. Por ejemplo, quizás los enunciados del tipo 'si α entonces β, o γ' algunos lectores los formalizarían mediante

$$(\alpha\to\beta)\vee\gamma$$

y otros mediante

$$\alpha\to(\beta\vee\gamma).$$

Pues bien, aunque ahora quizás no se vea claramente, ambas fórmulas son equivalentes. Obviamente, qué formulas sean equivalentes no depende de lo que al lector le parezca, sino que es algo perfectamente especificable como veremos más adelante. Así que deberá esperar a confirmar si sus intuiciones son correctas hasta que presentemos de forma precisa la noción de equivalencia.

AMBIGÜEDAD

En los casos de formalizaciones alternativas equivalentes la diferencia es únicamente la forma en que se expresa un contenido, no en el contenido mismo. No son pues casos de ambigüedad. La ambigüedad se da cuando un mismo enunciado es interpretado por dos hablantes, o por un

mismo hablante en contextos diferentes, como expresando contenidos realmente diferentes. Por ejemplo, muchas personas protestan ante la formalización de 'α sólo si β' mediante $\alpha \rightarrow \beta$, pues dicen que "lo correcto" es $\alpha \leftrightarrow \beta$. Es decir, interpretan siempre esa locución como un bicondicional.[4] Algo parecido sucede con el disyuntor, que para muchos siempre tiene sentido exclusivo. Es cierto que en ciertos contextos 'α o β' puede interpretarse exclusivamente. Muchos p.e. interpretarían 'Hoy iré al cine o al teatro' como disyunción exclusiva, pero seguramente lo harían porque tomarían en consideración el contenido de los enunciados simples para interpretar el enunciado complejo. Probablemente no interpretarían exclusivamente la locución parecida 'El año próximo iré al cine o al teatro'. De todas formas, basta con que al menos en algún caso la disyunción tenga sentido inclusivo para disponer de esta conectiva y expresar el sentido exclusivo mediante una forma compleja.[5]

La vaguedad es un fenómeno ubicuo en el lenguaje. Y son vagas, no sólo expresiones componentes de enunciados atómicos (lo que no nos afectaría en el nivel en que ahora estamos), sino también las partículas conectivas del lenguaje natural y los enunciados moleculares que las contienen. Pero la vaguedad no tiene en cierto sentido nada que ver con la formalización. Al formalizar en lenguaje proposicional debemos expresar un *contenido* (molecular) en el lenguaje formal. Cuando hay ambigüedad, no está claro cuál es ese contenido (aunque no piense el lector que cualquier frase ambigua puede expresar cualquier cosa: 'α sólo si β' no se puede formalizar en ningún contexto mediante p.e. $\alpha \wedge \beta$). Ahora bien, *si* está claro el contenido, entonces su formalización correcta también lo está (independientemente de que podamos usar fórmulas equivalentes).

Concluiremos este capítulo formalizando tres enunciados del lenguaje natural.

EJEMPLO: Los panteístas tienen razón sí y sólo si el mundo es eterno y Dios no lo ha creado.
Enunciados atómicos:
$p\equiv$ Los panteístas tienen razón
$q\equiv$ El mundo es eterno
$r\equiv$ Dios ha creado el mundo
Formalización: $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$

EJEMPLO: Si Aristóteles, que es un gran científico, está en lo cierto, entonces el mundo no contiene átomos ni vacío.
Enunciados atómicos:
$p\equiv$ Aristóteles es un gran científico

4. Que la formalización más débil es razonable puede verse en que 'α sólo si β' es "lo que queda" de 'α si y sólo si β' si "le quitamos" la parte 'α si β'.

5. Una estudiante que defendía que la disyunción *siempre* es exclusiva fue convencida por otra con el siguiente ejemplo: "Imagínate que en una fiesta de fin de año, antes de medianoche, te apuestas algo conmigo a que el año próximo te ligarás a un rubio o a un pelirrojo. Y el primero de enero te ligas a un rubio. Si tuvieses razón y esta disyunción fuese exclusiva, para cobrar la apuesta deberías esperar a que transcurriera todo el año sin ligarte a un pelirrojo".

$q \equiv$ Aristóteles está en lo cierto
$r \equiv$ El mundo contiene átomos
$s \equiv$ El mundo contiene vacío
Formalización: $p \wedge (q \rightarrow (\neg r \wedge \neg s))$

EJEMPLO: La reunión será el sábado si no van Luisa ni María. Juan irá a la reunión si y sólo si Luisa o Fernando no van. No ocurrirá a la vez que vaya Juan y que la reunión no sea el sábado. Todo lo anterior ocurrirá en el caso, y sólo en el caso, de que no vaya Fernando o no sea verdad que si va Luisa no va Juan.
Enunciados atómicos:
$p \equiv$ La reunión es el sábado
$q \equiv$ Luisa va a la reunión
$r \equiv$ María va a la reunión
$s \equiv$ Juan va a la reunión
$t \equiv$ Fernando va a la reunión
Formalización: $(((\neg q \wedge \neg r) \rightarrow p) \wedge (s \leftrightarrow (\neg q \vee \neg t)) \wedge \neg (s \wedge \neg p)) \leftrightarrow (\neg t \vee \neg (q \rightarrow \neg s))$

Este último ejemplo es útil para comentar algo importante que todavía no habíamos podido comentar. Quizás el lector haya advertido que el enunciado original contiene como partes enunciados que sólo se diferencian en el tiempo verbal, p.e. 'Juan irá a la fiesta' y 'Juan va a la fiesta', y que en la formalización hemos tomado ambos enunciados como el mismo, esto es, hemos formalizado ambos enunciados simples mediante la misma letra sentencial s. Pues bien, esa es otra de las limitaciones de la lógica clásica, que no toma en consideración los aspectos *temporales* de las proposiciones. Por lo general, esta simplificación no tiene graves consecuencias, pues en la mayoría de contextos la validez/invalidez de un argumento no depende de los aspectos temporales. Pero en algunos casos sí puede depender de tales aspectos. Para estos casos, se debe desarrollar una lógica que tenga en cuenta los aspectos temporales en la formalización y en el análisis de la validez de la argumentación. Las lógicas que amplían la lógica clásica en esta dirección son las *lógicas temporales*.[6]

EJERCICIOS: 11 al 20.

Ejercicios

Determinar cuáles de las siguientes secuencias de signos son expresiones bien formadas y cuáles no lo son. Cuando no lo sean por motivo de los paréntesis, corregir éstos de dos modos distintos para que las expresiones resultantes estén bien formadas aplicando las convenciones que permiten la simplificación de paréntesis.

6. Para una introducción a la lógica temporal, traducida al español, puede consultarse el libro de J.L. Gradies *Lógica del tiempo* (Paraninfo, Madrid 1979).

1 $(\neg p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow \neg t$
2 $(r \vee \neg p) \rightarrow q \neg$
3 $r \leftrightarrow (s \wedge \neg t \neg p)$
4 $\neg ((\neg q \rightarrow r \wedge s) \vee p)$
5 $(r \wedge (p \rightarrow \neg q \vee r)) \vee (s \leftrightarrow p)$
6 $\neg (p \vee q \leftrightarrow r \rightarrow \neg s \wedge (q \leftrightarrow r)$
7 $q \leftrightarrow (p \wedge (\neg p \rightarrow q) \vee \neg\neg r)$
8 $q \wedge \neg (t \rightarrow s \wedge (p \leftrightarrow (\neg t \vee q \rightarrow \neg (s \vee t))))$
9 $\neg (p \rightarrow (((\neg q \leftrightarrow (r \vee (s \wedge t))) \rightarrow t) \rightarrow \neg u))$
10 $((((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg q) \rightarrow s) \rightarrow p \rightarrow \neg s$

Formalizar los siguientes enunciados, indicando los enunciados simples denotados por las letras enunciativas usadas.

11 Si no hay ruidos y no estás sordo, entonces debes oírme.

12 Iré al cine o al teatro, si me invitas.

13 En el caso de que venga Cipriano, vendrán Fulgencia y Eustaquia.

14 Si hay guerra, no crecerá el paro ni la inflación.

15 O Juan debe declarar y ser sincero, o no debe declarar.

16 Federico se irá a las Fiji o a las Sheichelles si y sólo si le toca la lotería y no se arruina en la ruleta.

17 El Hombre Lobo es un invento, y si lo mismo ocurre con Papa Noel, entonces los niños son engañados.

18 Cuando la bolsa baja mucho, entonces es conveniente comprar; y cuando la bolsa sube mucho, también es conveniente comprar.

19 Aumentará la inflación y disminuirá el paro, sólo si se fabrica moneda o hay guerra.

20 Si el aumento de la inflación implica la disminución de la balanza de pagos, entonces, si no disminuye la balanza de pagos no aumenta la inflación.

CAPÍTULO 3

SEMÁNTICA FORMAL. CONSECUENCIA LÓGICA

Vamos a ver ahora uno de los sentidos en que se puede analizar la idea de que una proposición "se sigue de" o "es apoyada por" otras proposiciones. La idea central de este sentido es que una fórmula β se sigue de otras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ syss: si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *fuesen* todas verdaderas entonces β sería también verdadera, esto es, no puede suceder que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sean todas verdaderas y que β sea falsa. Vimos que si β "se sigue" (deductivamente) de $\alpha_1, ..., \alpha_n$, entonces la información que proporciona β *está ya contenida* en la que proporcionan $\alpha_1, ..., \alpha_n$ conjuntamente. Si eso ocurre, entonces obviamente no puede suceder que la información "global" sea verdadera y una "parte" de la misma sea falsa. Esta intuición es la que explota la noción de *consecuencia lógica*.

La noción de consecuencia lógica, y las relacionadas de *equivalencia lógica* y *verdad lógica*, se califican de *semánticas*, pues hacen uso esencial de una propiedad semántica de las proposiciones, su ser verdaderas o ser falsas. Sin embargo, como anunciamos y se aclarará enseguida, para la noción de consecuencia lógica (y las relacionadas) no importa la verdad o falsedad *de hecho* de las proposiciones involucradas, sino ciertas relaciones entre sus diversas *posibilidades de verdad y falsedad*. Por ello, para hacer precisa esta noción necesitamos un modo de estudiar las diversas posibilidades de verdad y falsedad de las proposiciones y sus relaciones mutuas. Lo primero que necesitamos es un modo de determinar las diversas posibilidades de verdad y falsedad de una fórmula cualquiera. Ello supone asumir el llamado *Principio de Bivalencia*, esto es, que toda proposición es verdadera o es falsa. Aunque dicho principio puede ser cuestionado, y ciertas lógicas no lo asumen, en el ámbito en el que nos encontramos, el de la lógica clásica, es uno de los principios básicos.[1]

Lo que debemos hacer ahora, pues, es ver para cada fórmula las diversas posibilidades veritativas, las diversas posibilidades que tiene de ser verdadera o ser falsa. La idea básica es la siguiente:

1. Las lógicas que no asumen el principio de bivalencia son las *lógicas multivaluadas*. Para una introducción a las mismas, cf. J. Rosser y A. R. Turquette, *Many-valued Logics* (North Holland, Amsterdam 1952). Una presentación básica de su motivación se encuentra, en castellano, en el cap. 4 del libro de S. Haack *Lógica divergente* (Paraninfo, Madrid 1979); este texto contiene también una presentación general de otras lógicas no clásicas.

— Si la fórmula es atómica, su valor veritativo, verdadero o falso, vendrá dado (recuérdese que en el nivel en que ahora estamos las fórmulas atómicas permanecen "opacas", sin analizar).

— Si la fórmula es molecular, su valor veritativo dependerá del valor veritativo de las atómicas que la componen y del modo en que éstas están combinadas para constituir la molecular, esto es, de la estructura lógica de la molecular. Como la estructura lógica de la fórmula molecular depende de las conectivas, bastará entonces saber: (i) el valor de las atómicas y (ii) *cómo se comportan las conectivas con los valores veritativos*. Esto es, supuesto que sabemos el valor veritativo de α y de β, necesitamos saber cuál es el valor veritativo de $\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$ y $\alpha\leftrightarrow\beta$. A esto nos referimos cuando hablamos de "el comportamiento semántico de las conectivas". Como toda fórmula molecular es el resultado de aplicar sucesivamente las conectivas, en cuanto sepamos el comportamiento semántico de las conectivas sabremos el valor de cualquier fórmula molecular, supuesto sabido el de las atómicas que la componen. Veamos ahora el aparato formal que corresponde a esta idea.

1. Interpretación $\mathbb{I}$

Llamaremos *función interpretación* a cualquier función $\mathbb{I}$ que asigna a cada fórmula α un valor veritativo. Si α es atómica, $\mathbb{I}(\alpha)$ es primitivo. Si α es molecular, $\mathbb{I}(\alpha)$ dependerá del valor de $\mathbb{I}$ para las atómicas que constituyen α y del modo en que estas atómicas forman, mediante conectivas, la fórmula α. Vamos a usar '1' como abreviatura de 'verdadero' y '0' como abreviatura de 'falso' (otros usan, 'V' y 'F', o '$\top$' y '$\bot$', respectivamente). Así, '$\mathbb{I}(\alpha)=1$' significará que α es verdadera, y '$\mathbb{I}(\alpha)=0$' que α es falsa. La función $\mathbb{I}$ asignará a cada fórmula o bien 1 o bien 0.[2]

Para determinar una función $\mathbb{I}$ específica entre las muchas posibles es necesario determinar:

(a) el valor de las fórmulas atómicas,[3]

(b) "cómo se comporta $\mathbb{I}$ con las conectivas", en el sentido precisado más arriba.

Lo primero se considerará dado en cada caso, esto es, los valores veritativos de las fórmulas atómicas son primitivos. Lo segundo, especificar cómo se comporta $\mathbb{I}$ con las conectivas, es dar una *definición semántica* de las conectivas, especificar el valor veritativo que $\mathbb{I}$ asigna a la molecular que surge de aplicar cada una de las conectivas (recuérdese que cada atómica puede ser o verdadera o falsa):

2. Esto es, $\mathbb{I}$ es una función asigna a cada elemento del conjunto FOR de todas las fórmulas un elemento del conjunto {1,0} de valores veritativos: $\mathbb{I}$: FOR $\Rightarrow$ {1,0}. En la parte de Teoría de Conjuntos se define de modo preciso la noción de función. De momento aquí nos basta con una caracterización informal de la misma como asignación a cada miembro de un conjunto de *un* miembro de otro conjunto. A cada elemento del conjunto salida sólo se le puede asignar un único elemento del conjunto llegada, pero un mismo elemento del conjunto llegada puede asignarse a más de un elemento del conjunto salida.

3. Esto es, la función $\mathbb{I}_{ATOM}$: $FOR_{ATOM} \Rightarrow \{1,0\}$ (siendo $\mathbb{I}_{ATOM} \subseteq \mathbb{I}$).

DEFINICIÓN SEMÁNTICA DE LAS CONECTIVAS

La idea de dar la definición semántica de las conectivas es la que especificamos más arriba: si supiésemos el valor veritativo de α y de β, ¿cuál sería entonces el valor veritativo de, p.e., $\alpha \wedge \beta$?; y análogamente para el resto de las conectivas. La respuesta en cada uno de los casos es la siguiente (compruebe el lector si coincide con sus intuiciones sobre el uso que hacemos de éstas partículas en el lenguaje):

— La negación $\neg\alpha$ de una proposición verdadera es falsa, y la de una proposición falsa es verdadera.

— La conyunción $\alpha \wedge \beta$ de dos proposiciones es verdadera si ambas son verdaderas, y es falsa en caso contrario, e.e. cuando al menos una de ellas es falsa.

— La disyunción (no exclusiva) $\alpha \vee \beta$ de dos proposiciones es verdadera cuando al menos una es verdadera, y es falsa en caso contrario, e.e. cuando ambas son falsas.

— La implicación mutua entre dos proposiciones $\alpha \leftrightarrow \beta$ es verdadera cuando son ambas verdaderas o ambas falsas, e.e. cuando ambas tienen el mismo valor veritativo, y es falsa en caso contrario, e.e. cuando tienen diferente valor veritativo.

— La implicación material $\alpha \rightarrow \beta$ es falsa cuando la proposición antecedente es verdadera y la proposición consecuente es falsa, y es verdadera en caso contrario, e.e. cuando el antecedente es falso o el consecuente es verdadero. Quizás el lector no encuentre intuitivo el que un condicional con antecedente falso sea verdadero, pues quizás sus intuiciones inmediatas no le digan nada acerca de cuál es el valor veritativo de un condicional con antecedente falso. Aunque no podemos extendernos ahora en ello, para mitigar provisionalmente las dudas baste de momento decir que eso es lo que debe aceptar si ha aceptado antes que el conyuntor y el bicondicional se comportan de la manera indicada. En efecto, $\alpha \leftrightarrow \beta$ es intuitivamente equivalente a $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, y (como el propio lector podrá comprobar en breve), dado que el conyuntor y el bicondicional tienen el comportamiento indicado, para que dicha equivalencia sea válida el condicional debe tener el comportamiento semántico que se ha especificado.

El siguiente cuadro resume la definición semántica de las conectivas:

Negador:	$\mathbb{I}(\neg\alpha)=1$	syss	$\mathbb{I}(\alpha)=0$
Conyuntor:	$\mathbb{I}(\alpha \wedge \beta)=1$	syss	$\mathbb{I}(\alpha)=1$ y $\mathbb{I}(\beta)=1$
Disyuntor:	$\mathbb{I}(\alpha \vee \beta)=0$	syss	$\mathbb{I}(\alpha)=0$ y $\mathbb{I}(\beta)=0$
Condicional:	$\mathbb{I}(\alpha \rightarrow \beta)=0$	syss	$\mathbb{I}(\alpha)=1$ y $\mathbb{I}(\beta)=0$
Bicondicional:	$\mathbb{I}(\alpha \leftrightarrow \beta)=1$	syss	$\mathbb{I}(\alpha)=\mathbb{I}(\beta)$

Ahora es fácil ver que podemos determinar el valor de verdad de una fórmula cualquiera con sólo saber el valor de verdad de sus atómicas constituyentes.

EJEMPLO: ¿Qué asigna **I** a $(p \wedge (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (s \rightarrow \neg q)$ si **I**(p)=1, **I**(q)=1, **I**(r)=0 y **I**(s)=1? Veamos:

I($\neg q$)=0 puesto que **I**(q)=1,
I($s \rightarrow \neg q$)=0 puesto que **I**(s)=1 y **I**($\neg q$)=0,
I($\neg r$)=1 puesto que **I**(r)=0,
I($q \vee \neg r$)=1 puesto que **I**(q)=1, o también puesto que **I**($\neg r$)=1,
I($p \wedge (q \vee \neg r)$)=1 puesto que **I**(p)=1 y **I**($q \vee \neg r$)=1,
por último, **I**($(p \wedge (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (s \rightarrow \neg q)$)=0, puesto que **I**($p \wedge (q \vee \neg r)$)=1 y **I**($s \rightarrow \neg q$)=0.

Así pues, si p, q y s son verdaderas y r es falsa, entonces $(p \wedge (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (s \rightarrow \neg q)$ es falsa. Compruebe el lector que esta misma fórmula es verdadera de acuerdo con una nueva interpretación de las atómicas según la cual p es falsa y q, r y s son verdaderas.

EJERCICIOS: 21 a 35.

2. Tablas de verdad

Acabamos de ver cómo el valor veritativo de una fórmula molecular depende del valor de sus atómicas constituyentes y de su estructura lógica. Así, cada interpretación de las atómicas determina automáticamente una interpretación, un valor veritativo, de las moleculares. Hemos visto, por ejemplo, que:

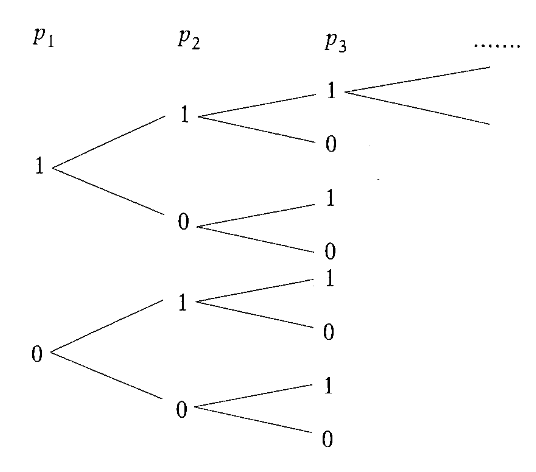
si **I**(p)=1, **I**(q)=1, **I**(r)=0 y **I**(s)=1, entonces **I**($(p \wedge (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (s \rightarrow \neg q)$)=0

y, de modo análogo, podríamos establecer, por ejemplo, que

si **I**(p)=0, **I**(q)=1, **I**(r)=1 y **I**(s)=1, entonces **I**($(p \wedge (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (s \rightarrow \neg q)$)=1.

El lector habrá advertido que éstas son sólo dos de las muchas interpretaciones combinadas posibles para estas cuatro atómicas. En realidad, como enseguida veremos, para cuatro atómicas tenemos 16 interpretaciones posibles diferentes (intente el lector construirlas todas antes de ver el procedimiento automático para generarlas que vamos a presentar). Pues bien, para ciertos fines va a ser necesario determinar el valor veritativo de una fórmula molecular para todas y cada una de las posibles interpretaciones de sus atómicas constituyentes, esto es, el conjunto completo de posibilidades veritativas de una molecular en función de las posibilidades veritativas de sus atómicas constituyentes. En lugar de hacerlo aisladamente para cada interpretación, como en el ejemplo anterior, seguiremos un procedimiento para construir de modo sencillo el conjunto completo de posibilidades veritativas. El resultado de este procedimiento se expresa en la *tabla de verdad* de la fórmula en cuestión.

Lo primero que precisamos para construir una tabla de verdad de una fórmula molecular es determinar el número total de las diferentes interpretaciones posibles de la combinación de atómicas que la constituyen. Es fácil ver que si una molecular tiene n atómicas *diferentes*, entonces hay 2^n interpretaciones posibles. No lo vamos a demostrar en rigor, pero puede verse que es así en el siguiente gráfico:



Ahora, dada una fórmula cualquiera, es sencillo seguir un procedimiento para construir todas las posibles combinaciones de interpretaciones de las atómicas asegurándonos de no dejarnos ninguna. Uno, por ejemplo, y que seguiremos en adelante, es éste:

(a) determínese cuántas interpretaciones diferentes hay en función de cuántas atómicas hay: 2^n para n atómicas;
(b) colóquese debajo de la primera atómica una serie de 1s y 0s alternos hasta completar 2^n filas, repitiendo la misma serie debajo de cada aparición de esa misma atómica;
(c) colóquese debajo de la próxima atómica distinta de la primera una serie de dos 1s y dos 0s alternos hasta etc.
(d) colóquese debajo de la próxima nueva atómica una serie de cuatro 1s y cuatro 0s alternos hasta completar etc.

(e) colóquese debajo de la enésima nueva atómica una serie de $2^n/2$ 1s y $2^n/2$ 0s hasta etc.

Por ejemplo, si sólo hay una atómica tenemos 2 interpretaciones posibles:

p
1
0

Si hay dos atómicas, tenemos 4 interpretaciones posibles:

p	q
1	1
0	1
1	0
0	0

Si hay tres atómicas, tenemos 8 interpretaciones posibles:

p	q	r
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Así, por ejemplo, si la molecular es $(\neg p \vee q) \rightarrow \neg ((r \wedge q) \leftrightarrow p)$, para hacer su tabla de verdad construimos primero todas las interpretaciones posibles (obsérvese que cuando una letra enunciativa aparece más de una vez, repetimos la columna que le ha correspondido la primera vez):

$(\neg p \vee q) \rightarrow \neg ((r \wedge q) \leftrightarrow p)$

p	q	r	q	p
1	1	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	0	1	0	0
1	1	0	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Una vez tenemos las interpretaciones en las filas de la tabla, se resuelven las columnas de las conectivas de acuerdo con la definición semántica de los conectores operando por orden de menor a mayor dominancia. Antes de aplicar este método a esta fórmula, vamos a ver la tabla de cada una de las conectivas:

Negador

$\neg$	p
0	1
1	0

Conyuntor

p	$\wedge$	q
1	**1**	1
0	**0**	1
1	**0**	0
0	**0**	0

Disyuntor

p	$\vee$	q
1	**1**	1
0	**1**	1
1	**1**	0
0	**0**	0

Condicional

p	$\rightarrow$	q
1	**1**	1
0	**1**	1
1	**0**	0
0	**1**	0

Bicondicional

p	$\leftrightarrow$	q
1	**1**	1
0	**0**	1
1	**0**	0
0	**1**	0

Cada valor en la columna debajo de la conectiva indica el valor veritativo de la molecular (en la que dicha conectiva es dominante) para la interpretación de las atómicas correspondiente a la fila donde está el valor. En el siguiente ejemplo, las flechas curvas indican el orden en que se han ido resolviendo las columnas de las conectivas de menor a mayor dominancia en la fórmula:

(p	$\vee$	q)	$\rightarrow$	$\neg$	p
1	1	1	**0**	0	1
0	1	1	**1**	1	0
1	1	0	**0**	0	1
0	0	0	**1**	1	0

Veamos ahora el caso $\alpha \equiv (\neg p \vee q) \rightarrow \neg ((r \wedge q) \leftrightarrow p)$ con tres atómicas que quedó pendiente. Resolveremos en primer lugar sólo las columnas de las conectivas menos dominantes:

$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	$((r$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	1		1			1	1	1		1
1	0		1			1	1	1		0
0	1		0			1	0	0		1
1	0		0			1	0	0		0
0	1		1			0	0	1		1
1	0		1			0	0	1		0
0	1		0			0	0	0		1
1	0		0			0	0	0		0

Ahora las restantes, salvo la principal:

$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	$((r$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	1	1	1		0	1	1	1	1	1
1	0	1	1		1	1	1	1	0	0
0	1	0	0		1	1	0	0	0	1
1	0	1	0		0	1	0	0	1	0
0	1	1	1		1	0	0	1	0	1
1	0	1	1		0	0	0	1	1	0
0	1	0	0		1	0	0	1	0	1
1	0	1	0		0	0	0	1	1	0

Y por último, la columna correspondiente a la conectiva principal:

$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	$((r$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	1	1	1	**0**	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	**1**	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	**1**	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	**0**	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	**1**	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	**0**	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	**1**	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	**0**	0	0	0	1	1	0

Esta tabla de verdad expresa cómo varía la interpretación de la molecular en función de las diferentes interpretaciones posibles de sus atómicas constituyentes. Cada fila expresa una de esas posibilidades. Por ejemplo:

Segunda fila: si $\mathbf{I}(p)=0$, $\mathbf{I}(q)=1$ y $\mathbf{I}(r)=1$, entonces $\mathbf{I}(\alpha)=1$.
Cuarta fila: si $\mathbf{I}(p)=0$, $\mathbf{I}(q)=0$ y $\mathbf{I}(r)=1$, entonces $\mathbf{I}(\alpha)=0$.

Cuando en el capítulo anterior vimos la simplificación de paréntesis, dijimos que los paréntesis se pueden eliminar en las series de conyunciones y en las series de disyunciones por ser conyuntor y disyuntor asociativos. Eso quiere decir que una fórmula de la forma

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta) \rightarrow \eta$$

se considera escrita correctamente, porque las diversas interpretaciones que surgirían de agrupar los cuatro conyuntos del antecedente dos a dos de las (cinco) diversas maneras posibles son todas ellas equivalentes. Esta escritura simplificada, sin embargo, puede crear algún problema a la hora de hacer la tabla de verdad de fórmulas de este tipo y otros parecidos, pues para ello es necesario identificar "la conectiva dominante" en el antecedente, para poder después resolverla junto con la columna del consecuente. Y en su actual forma no se ve cuál usar. Debe quedar claro que este problema es de fácil solución. Podemos usar como conectiva dominante del antecedente la que queramos, siempre y cuando las restantes se agrupen correctamente. Es decir, hay varias posibilidades de resolver esta tabla agrupando las partes del antecedente de (cinco) diversas formas, pero todas van a dar el mismo resultado final (el lector atento habrá adivinado ya qué vamos a entender en la sec. 4 por fórmulas *equivalentes*).

3. **Satisfacibilidad, tautologicidad**

SATISFACIBILIDAD PARA FÓRMULAS

Para ciertos fines que veremos más adelante, es conveniente distinguir las fórmulas en función de sus posibilidades veritativas, esto es, de su tabla de verdad. Vamos a distinguir los siguientes casos:

> α es *satisfacible* syss es verdadera bajo alguna interpretación de sus atómicas constituyentes, esto es, cuando su tabla de verdad contiene al menos un 1 en la columna correspondiente a su conectiva principal.
> α es *insatisfacible* (o *contradictoria*) syss es falsa bajo cualquier interpretación de sus atómicas constituyentes, esto es, cuando su tabla de verdad contiene sólo 0s en la columna correspondiente a su conectiva principal.
> α es *tautológica* syss es verdadera bajo cualquier interpretación de sus atómicas constituyentes, esto es, cuando su tabla de verdad contiene sólo 1s en la columna correspondiente a su conectiva principal.
> α es *contingente* syss es verdadera bajo alguna interpretación de sus atómicas constituyentes y falsa bajo alguna otra, esto es, cuando su tabla de verdad contiene al menos un 1 y al menos un 0 en la columna correspondiente a su conectiva principal.

Las fórmulas se dividen pues en satisfacibles y contradictorias (insatisfacibles), y las satisfacibles, en contingentes y tautológicas. Toda fórmula atómica es contingente. Las fórmulas moleculares pueden, en cambio, ser contingentes, tautológicas o contradictorias. Hemos visto que la fórmula

$(\neg p \vee q) \rightarrow \neg ((r \wedge q) \leftrightarrow p)$

es contingente. Compruebe el lector que, de las dos fórmulas que siguen, la primera es tautológica y la segunda contradictoria.

$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg ((r \vee q) \leftrightarrow p)$
$(p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \leftrightarrow \neg ((r \vee q) \rightarrow p)$

SATISFACIBILIDAD PARA CONJUNTOS DE FÓRMULAS

La noción de *satisfacibilidad* se aplica a conjuntos de fórmulas además de a fórmulas individuales. Decimos que un conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es *satisfacible* syss hay al menos una interpretación que hace verdaderas a la vez a $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Y decimos que el conjunto de fórmulas es *insatisfacible* en caso contrario, esto es, si no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a la vez a todas las fórmulas del conjunto.

El lector habrá seguramente advertido la relación inmediata que hay entre satisfacibilidad de fórmulas y de conjuntos: el conjunto $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ es satisfacible syss la fórmula $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$ es satisfacible. Otra relación inmediata es la que se da entre fórmulas condicionales tautológicas e insatisfacibilidad: la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ es tautológica syss el conjunto $\{\alpha, \neg\beta\}$ es insatisfacible.

MÉTODO ABREVIADO PARA DETERMINAR TAUTOLOGICIDAD Y SATISFACIBILIDAD

Como veremos, muchas veces es necesario determinar únicamente si una fórmula α es o no tautológica, sin importar, caso de no serlo, si es contingente o contradictoria. Cuando la fórmula tiene 4 o más atómicas es muy engorroso construir toda la tabla de verdad, por lo que sería bueno disponer de un procedimiento más breve para determinar exclusivamente si es o no una tautología. Un procedimiento tal consiste en "intentar encontrar una interpretación de las atómicas para la cual α sea falsa". Si es posible "rellenar" una fila de modo que debajo de la conectiva principal haya un 0, entonces α no es tautológica. Si, por el contrario, al intentar que debajo de la conectiva principal haya un 0 nos vemos obligados a asignar dos valores veritativos diferentes a una misma atómica, entonces no es posible que α sea falsa, y por tanto es tautológica. Aunque se puede aplicar en general, este procedimiento es especialmente adecuado (permite una resolución más rápida) para fórmulas cuya conectiva principal es un condicional, que serán las que más nos interesarán cuando veamos la noción de consecuencia lógica. Veamos cómo determinar mediante este procedimiento si las siguientes fórmulas son o no tautológicas:

EJEMPLO: $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

Intentemos que sea falsa. Es decir, intentemos encontrar valores de las atómicas tales que

$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
0

Para ello, ha de ocurrir lo siguiente:

$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
1 0 0

A su vez, para que esto sea posible, como $(q \to \neg p)$ ha de ser falsa q ha de ser verdadera y $\neg p$ falsa, e.e. p verdadera:

$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
1 0 1 0 0 1

Ahora bien, si p ha de ser verdadera, puesto que $(p \to \neg q)$ es verdadera, entonces $\neg q$ debería ser verdadera, e.e. q debería ser falsa, pero ello entra en conflicto con el valor que hemos visto debía tener q en la parte derecha. El siguiente cuadro resume la situación:

$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
1 1 1 **0** 0 **1** 0 0 1

Habríamos encontrado una incompatibilidad semejante si hubiésemos trasladado en primer lugar el valor de q de la parte derecha a la parte izquierda. Ahora sería el valor de p el que "no encajaría", pues debería ser 0 a la izquierda y 1 a la derecha:

$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
0 1 0 1 0 1 0 0 **1**

La fórmula, pues, es una tautología, no es posible encontrar una interpretación coherente de las atómicas que la haga falsa.

EJEMPLO: $(\neg p \wedge (r \vee q)) \to (q \to r)$

Como en el caso anterior, ponemos un 0 bajo el condicional principal e intentamos que "todo encaje":

$(\neg p \wedge (r \vee q)) \to (q \to r)$
1 0 0

Para ello ha de ocurrir que

$(\neg p \wedge (r \vee q)) \to (q \to r)$
1 1 1 0 1 0 0

Y todo encaja si, además de que q valga 1 y r valga 0, p vale 0:

$(\neg p \wedge (r \vee q)) \to (q \to r)$
1 0 1 0 1 1 0 1 0 0

Así pues, si $\mathbf{I}(p)=0$, $\mathbf{I}(q)=1$ y $\mathbf{I}(r)=0$, entonces $\mathbf{I}((\neg p \wedge (r \vee q)) \to (q \to r))=$ 0 y por tanto no es una tautología al haber al menos una interpretación que la hace falsa. Note el lector que si en lugar del conyuntor hubiese un disyuntor, p podría ser tanto verdadera como falsa. Reconstruya el proce-

dimiento para este caso. Veamos para acabar un caso con cuatro atómicas (cuya tabla de verdad tendría 16 filas).

EJEMPLO: $((\neg p \vee q) \wedge \neg (q \wedge \neg r) \wedge (r \leftrightarrow \neg s)) \rightarrow (s \rightarrow \neg p)$

Intentemos encontrar un 0 bajo el condicional principal. Para lo cual los tres conyuntos del antecedente han de ser verdaderos y el consecuente falso:

$$((\neg p \vee q) \wedge \neg (q \wedge \neg r) \wedge (r \leftrightarrow \neg s)) \rightarrow (s \rightarrow \neg p)$$
1 1 1 0 0

Esto nos obliga a las siguientes adscripciones:

$$((\neg p \vee q) \wedge \neg (q \wedge \neg r) \wedge (r \leftrightarrow \neg s)) \rightarrow (s \rightarrow \neg p)$$
1 1 0 1 0 1 0 01

Trasladamos ahora los valores encontrados de p y s al resto de sus ocurrencias y resolvemos las subfórmulas correspondientes:

$$((\neg p \vee q) \wedge \neg (q \wedge \neg r) \wedge (r \leftrightarrow \neg s)) \rightarrow (s \rightarrow \neg p)$$
01 1 1 0 1 01 0 1 0 01

Ahora, p.e., como $(\neg p \vee q)$ es verdadera y $\neg p$ es falsa, q ha de ser verdadera. Pero si q es verdadera, como $(q \wedge \neg r)$ es falsa, entonces $\neg r$ ha de ser falsa, y por tanto r ha de ser verdadera. Pero por otro lado, $(r \leftrightarrow \neg s)$ es verdadera y $\neg s$ es falsa, por lo que r debería ser falsa, contra lo que acabamos de establecer:

$$((\neg p \vee q) \wedge \neg (q \wedge \neg r) \wedge (r \leftrightarrow \neg s)) \rightarrow (s \rightarrow \neg p)$$
01 1 1 1 1 0 0**1** **0** 1 01 0 1 0 01

La fórmula, pues, es una tautología, no es posible encontrar una interpretación coherente de las atómicas que la haga falsa.

Es fácil ver que mediante un procedimiento parecido podemos determinar si un conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es o no satisfacible. La idea es la misma: inténtese hallar una interpretación que haga verdaderas a todas:

$\alpha_1 \ldots \alpha_n$
1

Si se logra, es satisfacible. Si no se logra, si al intentar que todas sean verdaderas a la vez nos vemos obligados a asignar a una misma atómica valores veritativos incompatibles, e.e. nos encontramos con que al menos una atómica debería ser a la vez verdadera y falsa, entonces el conjunto es insatisfacible. El lector puede comprobar, de los siguientes dos conjuntos de fórmulas, que el primero es insatisfacible y el segundo es satisfacible:

$\{(\neg p \vee q), \neg(q \wedge \neg r), (r \leftrightarrow \neg s), \neg(s \rightarrow \neg p)\}$

$\{\neg(p \wedge \neg q), \neg r \rightarrow q, \neg q, r \vee \neg p\}$

En realidad, como el lector atento quizás haya advertido, este método se aplica de modo general a la determinación de la satisfacibilidad de conjuntos, y su aplicación a fórmulas condicionales puede considerarse como un caso particular. En efecto, los apartados anteriores vimos, por un lado, que un condicional $\alpha \rightarrow \beta$ es tautológico syss el conjunto $\{\alpha, \neg\beta\}$ es insatisfacible, y por otro, que $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ es satisfacible syss $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es satisfacible. De ambas cosas se sigue que $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ es tautológica syss $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ es insatisfacible. Y eso es lo que se corresponde con la aplicación del método abreviado a la determinación de la tautologicidad de condicionales con antecedentes conyuntados, como en el último de los ejemplos anteriores. El condicional $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ es tautológico syss no hay interpretación tal que:

$$\begin{array}{llllll} (\alpha_1 & \wedge \ldots \wedge & \alpha_n &) & \rightarrow & \beta \\ 1 & & 1 & & & 0 \end{array}$$

Y el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ es insatisfacible syss no hay ninguna interpretación tal que

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & \neg\beta \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array}$$

lo cual equivale a que no haya ninguna interpretación tal que

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & \beta \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{array}$$

La idea por tanto es esencialmente la misma.

EJERCICIOS: 36 a 60.

4. **Consecuencia lógica, verdad lógica, equivalencia lógica:** $\models$

CONSECUENCIA LÓGICA

Con el aparato formal que hemos introducido, podemos ahora hacer precisa la noción de *consecuencia lógica* y las nociones asociadas de *verdad lógica* y *equivalencia lógica*. Vimos que la idea central asociada a la noción de consecuencia lógica consiste en que una fórmula β es consecuencia lógica de otras $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ syss si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *fuesen* todas verdaderas entonces β sería también verdadera, esto es, no puede ser que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sean todas verdaderas y β falsa. Con la noción de interpretación que hemos introducido ya podemos dar una definición precisa de esta noción:[4]

4. Nos limitamos aquí a los casos en los que el número de fórmulas antecedentes o premisas es finito. Los conjuntos infinitos de premisas requieren en algunos aspectos un tratamiento que excede el nivel de esta introducción. (Como se verá más adelante, puede ser que a veces el conjunto de premisas sea vacío; ello ebligaría a modificar ligeramente la definición para ser plenamente rigurosos, pero no lo harremos aquí.)

DEF Una fórmula β es *consecuencia lógica* de un conjunto de otras $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ (y escribimos '$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$') syss$_{def}$ para toda $\mathbb{I}$, si $\mathbb{I}(\alpha_1)=1$ y ... y $\mathbb{I}(\alpha_n)=1$ entonces $\mathbb{I}(\beta)=1$.

Así pues, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$ cuando toda interpretación que hace verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ hace también verdadera a β, esto es, no hay ninguna interpretación que haga verdadera a α_1 y a ... y a α_n pero no a β. Ahora tenemos la noción de consecuencia lógica perfectamente clara, bien definida. Pero una cosa es tener una noción clara y otra disponer de un criterio o procedimiento para determinar cuándo se aplica, esto es, para determinar si se cumple lo que la definición establece. ¿Tenemos un procedimiento para determinar si hay o no alguna interpretación que haga verdaderas a ciertas fórmulas y falsa a otra? Sí. Puesto que sea cual sea el número de atómicas involucradas en $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y β siempre será finito, será también finito el número de diferentes interpretaciones posibles y no tenemos más que inspeccionar todas para saber si alguna de ellas hace verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y falsa a β. Este es el tipo de información que podemos obtener mediante las tablas de verdad, o los métodos abreviados expuestos en la sección anterior. El modo más inmediato de comprobar si β es o no consecuencia de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ es estudiar la fórmula condicional $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$, pues de la definición de consecuencia lógica se sigue que si β es consecuencia de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, entonces dicho condicional es tautológico. En efecto, si β es consecuencia de $\alpha_1, ..., \alpha_n$, entonces no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y falsa a β, y por tanto tampoco habrá ninguna interpretación que haga verdadera a $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ y falsa a β. Pero entonces, ninguna interpretación hace verdadero el antecedente y falso el consecuente de $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$, esto es, dicha fórmula condicional es tautológica. Como vimos en la sección anterior, ello equivale a que el conjunto $\{\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta\}$ sea insatisfacible. Así pues, tenemos el siguiente corolario que nos proporciona un criterio para determinar si una fórmula es o no consecuencia lógica de otras:

COROLARIO: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$ syss $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ es tautológica
syss $\{\alpha_1,...,\alpha_n,\neg\beta\}$ es insatisfacible.

La definición de consecuencia lógica tiene un efecto que puede parecer contraintuitivo en primera instancia, pero que mirado con mayor detenimiento no lo es. β es consecuencia lógica de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ si no existe ninguna interpretación que haga verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ a la vez y que además haga falsa a β. ¿Qué ocurre en caso de que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sean incompatibles entre sí, esto es, en caso de que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ sea insatisfacible? Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es insatisfacible, entonces no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ a la vez, y por tanto no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y falsa a β, *cualquiera que β sea*. Simplemente, si ninguna interpretación cumple la condición de hacer verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$, ninguna interpretación cumplirá esa condición más la condición de hacer falsa a β. Así, si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son incompatibles entre sí, entonces cualquier fórmula β se sigue de ellas, sea β lo que sea:

COROLARIO: Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es insatisfacible, entonces para toda β:
$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$.

Una consecuencia análoga ocurre cuando β es tautológica. Si β es tautológica, entonces toda interpretación la hace verdadera, esto es, ninguna interpretación la hace falsa. Pero entonces es claro que ninguna interpretación hará verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y falsa a β, *cualesquiera que* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *sean*, por el simple motivo de que ninguna hace falsa a β. Así, si β es tautológica, entonces β se sigue de cualquier conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de fórmulas, sean estas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ las que sean:

COROLARIO: Si β es tautológica, entonces para cualesquiera $\alpha_1, ..., \alpha_n$:
$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$.

Así pues, de premisas contradictorias es consecuencia cualquier cosa y las tautologías son consecuencia de cualquier cosa. ¿Es esto contraintuitivo? Puede parecer contraintuitivo en primera instancia, si hacemos una lectura estrecha de la idea de que una afirmación se sigue de otras cuando la información de aquélla está contenida en la información conjunta de éstas. Pero en una lectura más amplia veremos que en realidad no es contraintuitivo. Un modo de mostrarlo es pensar en la relación entre estas nociones lógicas y la aceptabilidad racional. β es consecuencia lógica de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ cuando un ser racional *debería* aceptar β *si aceptase* $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Supongamos ahora que un ser tal acepta una serie de afirmaciones conjuntamente insatisfacibles, contradictorias entre sí. ¿No diríamos entonces que no tiene ningún motivo para no aceptar β, sea ésta la que sea? Si acepta esas afirmaciones inconsistentes entre sí, ¿qué otra afirmación va a excluir o rechazar justificadamente? Ninguna. En este sentido no es tan contraintuitivo que de premisas contradictorias sea consecuencia cualquier cosa. En cuanto al otro caso, si β es tautológica, entonces intuitivamente es racionalmente aceptable "en sí misma", independientemente de cualquier supuesto anterior, su aceptabilidad "no depende" de la aceptabilidad previa de otras afirmaciones. En ese sentido, tampoco es contraintuitivo que una tautología sea consecuencia de cualquier conjunto de premisas.

VERDAD LÓGICA

La noción de consecuencia lógica lleva asociada la noción de *verdad lógica*. La idea intuitiva es que una verdad lógica es una fórmula que es verdadera, no "en virtud de cómo es el mundo", sino *en virtud de su forma lógica*. Dado el comportamiento semántico de las conectivas, algunas fórmulas resultan verdaderas *independientemente de si sus atómicas constituyentes son verdaderas o falsas*, sólo por estar formadas por esas conectivas de ese modo específico. Eso es lo que quiere decir que no son verdaderas en virtud de cómo es el mundo sino de su forma lógica. Recuerde el lector que cada interpretación diferente de las atómicas, cada fila de la tabla de verdad, es un modo entre muchos posibles de "cómo podrían ser las co-

sas", esto es, una situación posible, uno de los diferentes modos en que el mundo podría ser (por lo que a las atómicas involucradas se refiere). Habrá adivinado entonces que una verdad lógica, si es una fórmula verdadera independientemente de cómo sea el mundo, independientemente de la verdad o falsedad de sus atómicas constituyentes, no es entonces sino una fórmula que resulta verdadera bajo cualquier interpretación. Efectivamente así es:

DEF Una fórmula α es una *verdad lógica* (y escribimos '$\models \alpha$') syss_{def} para toda **I**, $\mathbf{I}(\alpha)=1$.

Dada esta definición, y por lo visto anteriormente, es inmediato ver que el criterio para determinar si una fórmula es o no una verdad lógica es simplemente el criterio de tautologicidad. Las tautologías, y sólo ellas, son las verdades lógicas:

COROLARIO: $\models \alpha$ syss α es tautológica.

Hay innumerables verdades lógicas; en los ejercicios el lector tendrá oportunidad de determinar algunas de ellas. Vamos a mencionar aquí únicamente (esquemas de) algunas de entre las especialmente destacadas (aplazamos las de forma bicondicional para más adelante). Compruebe el lector que efectivamente se trata de (esquemas de) verdades lógicas.

(1) Principio de no contradicción: $\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
(2) Ley del tercio excluso: $\models \alpha \vee \neg\alpha$
(3) Principio de identidad: $\models \alpha \rightarrow \alpha$
(4) Ley de Clavius: $\models (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
(5) Reductio: $\models (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \neg\beta)) \rightarrow \neg\alpha$
(6) Ley de Escoto: $\models \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(7) Ley de Peirce: $\models ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
(8) Afirmación de antecedente: $\models ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$
(9) Negación de consecuente: $\models ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$
(10) Antecedente contradictorio: $\models (\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \rightarrow \beta$
(11) Consecuente válido: $\models \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Equivalencia lógica

La última noción de esta familia que estamos viendo es la de *equivalencia lógica*. La consecuencia es una relación entre un conjunto de fórmulas, de un lado, y una fórmula, de otro. La verdad lógica es una propiedad de fórmulas. La equivalencia lógica es una relación entre fórmulas. La idea es que dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes si "dicen lo mismo". Pero si dos fórmulas dicen lo mismo, entonces serán verdaderas o falsas en las mismas circunstancias, no puede ser que haya una situación en que una sea verdadera y la otra falsa. Eso, como se habrá adivinado, no es sino coincidir en el valor veritativo para cualquier interpretación:

DEF Dos fórmulas α y β son *lógicamente equivalentes* (y escribimos '$\alpha \models\mid \beta$') $syss_{def}$ para toda **I**, $\mathbf{I}(\alpha)=\mathbf{I}(\beta)$.

El criterio ahora para determinar si dos fórmulas son o no equivalentes debe estar claro: son equivalentes cuando reciben el mismo valor veritativo para cualquier interpretación, de donde se sigue que su bicondicional será tautológico:

COROLARIO: $\alpha \models\mid \beta$ syss $\alpha\leftrightarrow\beta$ es tautológica.

La siguiente lista contiene (esquemas de) algunas equivalencias lógicas especialmente destacadas (veremos otras también muy importantes en la próxima sección). Compruebe el lector que se trata efectivamente de (esquemas de) equivalencias lógicas (y recuerde que la asociatividad del conyuntor y del disyuntor, que anunciamos en la primera sección, es la que nos permite simplificar los paréntesis en las secuencias de conyuntores y en las secuencias de disyuntores).

(12) Doble negación: $\alpha \models\mid \neg\neg\alpha$
(13) Conmutatividad de la conyunción: $\alpha\wedge\beta \models\mid \beta\wedge\alpha$
(14) Conmutatividad de la disyunción: $\alpha\vee\beta \models\mid \beta\vee\alpha$
(15) Asociatividad de la conyunción: $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma \models\mid \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$
(16) Asociatividad de la disyunción:$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma \models\mid \alpha\vee(\beta\vee\gamma)$
(17) Distributividad de la conyunción respecto de la disyunción:
$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma) \models\mid (\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$
(18) Distributividad de la disyunción respecto de la conyunción:
$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma) \models\mid (\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$
Leyes de De Morgan:
(19) $\neg(\alpha\wedge\beta) \models\mid \neg\alpha \vee \neg\beta$
(20) $\neg(\alpha\vee\beta) \models\mid \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Es inmediato que la equivalencia lógica es, como su nombre connota, una *relación de equivalencia*, esto es, una relación *reflexiva* (cada fórmula es lógicamente equivalente a sí misma), *simétrica* (si una fórmula es lógicamente equivalente a otra entonces ésta también lo es de aquella) y *transitiva* (dos fórmulas lógicamente equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí):[5]

COROLARIO: Para toda α: $\alpha \models\mid \alpha$
Para toda α, β: Si $\alpha \models\mid \beta$ entonces $\beta \models\mid \alpha$
Para toda α, β, γ: Si $\alpha \models\mid \beta$ y $\beta \models\mid \gamma$ entonces $\alpha \models\mid \gamma$

Por último, es también intuitivamente obvio que, si en una fórmula sustituimos una parte suya por otra equivalente entonces la fórmula resultante es equivalente a la original:

5. Estas nociones se explican detalladamente en el capítulo 9 de la parte dedicada a la Teoría de Conjuntos. En el presente contexto basta la elucidación informal dada.

COROLARIO: Para toda α, β, γ, δ: si β es una subfórmula de α, $\beta \vDash\!\dashv \gamma$ y δ es el resultado de sustituir β por γ en α, entonces $\delta \vDash\!\dashv \alpha$

La prueba rigurosa de este corolario requiere un aparato que no hemos introducido aquí (el llamado *principio de inducción*), pero para ver intuitivamente su validez basta recordar que (i) el valor de verdad de una fórmula depende del valor de verdad de sus subfórmulas, y (ii) fórmulas equivalentes tienen el mismo valor de verdad en cualquier interpretación. Así, el valor de α depende del valor de β, pero como β tiene siempre el mismo valor que γ, entonces podemos sustituir una por otra en α sin afectar su valor veritativo.

Consecuencia lógica, *verdad lógica* y *equivalencia lógica* son las tres nociones semánticas clave. En realidad, son en cierto sentido la misma, o diferentes aspectos de una misma noción, pues es fácil ver que con una cualquiera de las dos primeras bastaría. Tomando como primitiva la noción de verdad lógica, podríamos definir fácilmente la de consecuencia lógica (cuando el conjunto de premisas es finito), y viceversa. Y a partir de cualquiera de ellas podríamos definir la de equivalencia lógica. Esto es lo que muestran los siguientes hechos:

(a) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vDash \beta$ syss $\vDash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$.
En efecto: por el criterio de consecuencia, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vDash \beta$ syss $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ es tautológica; y por el criterio de verdad lógica, $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ es tautológica syss $\vDash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$.

(b) $\alpha \vDash\!\dashv \beta$ syss $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$.
En efecto: por el criterio de equivalencia, $\alpha \vDash\!\dashv \beta$ syss $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautológica; y por el criterio de verdad lógica, $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautológica syss $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$.

(c) $\alpha \vDash\!\dashv \beta$ syss $\{\alpha\} \vDash \beta$ y $\{\beta\} \vDash \alpha$
Inmediato a partir de las anteriores.

Nótese que (b) permite generar verdades lógicas a partir de equivalencias. Así, por ejemplo, como tenemos la equivalencia $\neg(\alpha \vee \beta) \vDash\!\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$, tenemos también la verdad lógica bicondicional $\vDash \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. El lector puede añadir, por tanto, a la lista de verdades lógicas que vimos, todas las verdades lógicas de forma bicondicional que se derivan de la lista de equivalencias lógicas.

En las dos próximas secciones vamos a ver dos tipos de equivalencias lógicas especialmente importantes, las que muestran la interdefinibilidad de los conectores y las que expresan las formas normales conyuntivas y disyuntivas.

EJERCICIOS: 61 a 90.

5. Interdefinibilidad de conectores

Cuando presentamos la definición semántica de los conectores, intentamos persuadir al lector de la correspondiente al condicional, indican-

do que, a pesar de no parecer muy intuitivo en primera instancia que el condicional sea verdadero cuando su antecedente es falso, así debe ser si las tablas del conyuntor y el bicondicional son correctas y, como parece intuitivamente, un bicondicional $\alpha \leftrightarrow \beta$ "no es más que" la conyunción de dos condicionales opuestos: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Pues bien, este "no es más que" consiste simplemente en la equivalencia lógica: estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes en el sentido preciso de la sección anterior. Puesto que dos fórmulas equivalentes "dicen lo mismo" (tienen las mismas *condiciones de verdad*, son verdaderas o falsas en las mismas circunstancias), la equivalencia de esas dos fórmulas muestra que "lo que decimos con el bicondicional" podemos decirlo igual sin esa conectiva, usando sólo el condicional y el conyuntor, aunque obviamente de modo más largo. Cuando ello ocurre, decimos que la conectiva, el bicondicional en este caso, es *eliminable* o *definible* a partir de las otras conectivas. Por tanto, nuestro conjunto inicial de conectivas primitivas, como anunciamos al comienzo, es en cierto sentido excesivo, "sobran" conectivas, al menos el bicondicional. Con las cuatro restantes nos basta para poder expresar cualquier contenido molecular. Cuando un conjunto de conectivas es suficiente para expresar cualquier contenido molecular decimos que dicho conjunto de conectivas es *completo*. El conjunto es "suficiente" en el sentido indicado: con esas conectivas podemos formar fórmulas lógicamente equivalentes a las que formamos con el resto de conectivas. Así pues:

El conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ es un conjunto completo de conectivas.

Ahora sabemos que el conjunto de conectivas que dimos al comienzo no era un conjunto *mínimo* de conectivas, pues alguna era superflua. Hay un conjunto completo de conectivas más pequeño. ¿Es el conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ un conjunto "mínimo" de conectivas? Como habrá visto el lector, 'mínimo' significa aquí que todas las conectivas del conjunto son necesarias, que ninguna conectiva se puede eliminar a partir de las restantes, que no tiene ningún subconjunto completo más pequeño.

Pues bien, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ no es un conjunto mínimo de conectivas. Es fácil ver que todavía algunas de ellas son superfluas, eliminables a partir de las restantes. Se puede por tanto "simplificar". En realidad hay diversas posibilidades de simplificación, el conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ tiene varios subconjuntos completos mínimos. El negador, conjuntamente con una cualquiera de las restantes conectivas, constituye un conjunto completo. Así:

Los conjuntos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son conjuntos completos de conectivas.

Para demostrar esto basta dar, para cada conjunto, fórmulas que usen sólo sus conectivas y que sean lógicamente equivalente a las que usan el resto de conectivas. A modo de ejemplo, mostraremos que $\{\neg, \wedge\}$ es completo y el lector puede hacer los otros dos casos como ejercicio. Se trata pues de buscar fórmulas equivalentes a $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ que contengan exclusivamente las conectivas $\neg$ y $\wedge$. Aquí están las posibilidades más sencillas (compruebe el lector que son efectivamente equivalentes):

$\alpha \vee \beta \ \vDash\!\dashv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
$\alpha \rightarrow \beta \ \vDash\!\dashv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta \ \vDash\!\dashv \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

Hasta ahora sólo hemos considerado las posibilidades de simplificar la lista de conectivas que dimos inicialmente: ¬, ∧, ∨, → y ↔. Pero igual que, aunque no fuese necesario, dimos ↔ (y ∨ y →), podríamos haber dado también otras conectivas nuevas adicionales. De hecho, ya comentamos una cuando introdujimos el lenguaje y dijimos que el disyuntor ∨ está por la disyunción *no exclusiva* del lenguaje natural. En algunos casos, dijimos entonces, la disyunción en el lenguaje natural tiene un sentido exclusivo: o es verdadera una de las alternativas, o es verdadera la otra, pero no las dos. Podríamos haber utilizado una conectiva nueva para expresarlo, usando p.e. el signo '$\underline{\vee}$', pero no lo hicimos porque no era necesario, pues lo que queremos expresar con ella lo podemos expresar sin su ayuda (como en el caso del bicondicional). El signo que se use para esa nueva conectiva es irrelevante, lo que importa para "identificarla" es *su comportamiento semántico*, esto es, cómo se comporta combinando valores veritativos, su tabla de verdad. Lo importante, pues, es qué valor adquiere la disyunción exclusiva $\alpha \underline{\vee} \beta$ para las diferentes posibilidades de verdad y falsedad de α y β. Parece claro que si la idea de la disyunción exclusiva es que o es verdeara una alternativa, o es verdadera la otra, pero no ambas a la vez, entonces $\alpha \underline{\vee} \beta$ es verdadera justo en el caso que una es verdadera y la otra falsa, sin importar cuál sea la verdadera y cuál la falsa. Su definición semántica es por tanto la siguiente:

$\mathbf{I}(\alpha \underline{\vee} \beta)=1$ syss $\mathbf{I}(\alpha) \neq \mathbf{I}(\beta)$,

lo que genera la siguiente tabla de verdad

p	$\underline{\vee}$	*q*
1	**0**	1
0	**1**	1
1	**1**	0
0	**0**	0

Que esta nueva conectiva no es necesaria significa, en los términos ahora vistos, que es eliminable, por ejemplo mediante la siguiente equivalencia a partir de ¬, ∧ y ∨ (piense el lector otras posibilidades, p.e. una a partir de ¬ y ↔).

$\alpha \underline{\vee} \beta \ \vDash\!\dashv (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$

Lo que ahora nos interesa señalar con este ejemplo es que hay muchas más conectivas (binarias) posibles además de las cinco que presentamos inicialmente, entre ellas p.e. $\underline{\vee}$. ¿Cuántas posibles conectivas binarias hay? Para responder a esto la clave está en algo que acabamos de decir a propósito de la disyunción exclusiva. Lo que identifica a esta nueva conectiva no es el signo con que se representa, sino cómo se comporta com-

binando valores veritativos, esto es, su definición semántica, su tabla de verdad. Una conectiva no es más que una partícula lingüística que combina proposiciones más simples para dar lugar a proposiciones más complejas. Y lo que determina cuál es la proposición compleja resultante es justamente si es verdadera o si es falsa para cada una de las combinaciones veritativas de sus constituyentes:

p	**C**	q
1	?	1
0	?	1
1	?	0
0	?	0

Cada combinación de 1s y 0s en la columna central corresponde a una conectiva diferente. Así (leyendo ahora de izquierda a derecha las posibilidades que en la tabla se leen de arriba a abajo), tenemos las siguientes combinaciones ya conocidas:

para 1-1-1-0, **C** es la disyunción
para 1-0-0-0, **C** es la conyunción
para 1-1-0-1, **C** es el condicional
para 1-0-0-1, **C** es el bicondicional
para 0-1-1-0, **C** es la disyunción exclusiva.

Pero es fácil ver que hay muchas más posibilidades, muchas más conectivas posibles. Tantas como combinaciones diferentes de cuatro 1s y 0s en orden, exactamente 16 (construya el lector las 11 conectivas binarias restantes).

Hemos visto que con una conectiva monaria, el negador, y una binaria, el conyuntor, el disyuntor o el condicional, obtenemos un conjunto completo de conectivas, ellas bastan para expresar todas las posibles proposiciones moleculares (esto es, en los términos ahora vistos, las 16 posibilidades de combinación veritativa). El lector puede intentar encontrar una conectiva binaria diferente de $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ que forme también un conjunto completo junto con $\neg$. De momento parece que para obtener un conjunto completo de conectivas hace falta siempre una monaria, el negador, y una binaria (conyuntor, disyuntor, condicional, ...). ¿Es eso así? No. Hay dos conectivas binarias tales que *cada una de ellas sola* constituye un conjunto completo. Es decir, cualquier proposición molecular, cualquier posibilidad de combinación veritativa, es lógicamente equivalente a una fórmula que contiene exclusivamente una de esas conectivas. ¿Cuáles son esas dos conectivas completas? Se las conoce con los nombres de 'barra de Sheffer' (o a veces 'negación alterna') y de 'flecha' (o a veces 'negación conjunta'). La primera se suele representar mediante el signo '$\uparrow$', y la segunda mediante '$\downarrow$'. Pero, como hemos visto, lo que importa no es cómo se llaman ni cómo se representan, sino su comportamiento semántico, su tabla de verdad. La barra de Sheffer es la conectiva que da lugar a proposiciones falsas syss los dos constituyentes son verdaderos, y corresponde por tanto a la siguiente tabla:

p	$\mid$	q
1	**0**	1
0	**1**	1
1	**1**	0
0	**1**	0

La flecha es la conectiva que da lugar a proposiciones verdaderas syss los dos constituyentes son falsos, y corresponde por tanto a la siguiente tabla:

p	$\downarrow$	q
1	**0**	1
0	**0**	1
1	**0**	0
0	**1**	0

La flecha corresponde a las construcciones del lenguaje natural del tipo 'ni... ni...', y la barra de Sheffer a las del tipo 'no... o no...'. Como hemos dicho, cada una constituye un conjunto completo de conectivas. Para mostrar que así es, bastará mostrar que con ellas podemos obtener fórmulas equivalentes a otras que usan conectivas de los conjuntos completos de dos conectivas que ya conocemos. Si a partir de cada una de estas nuevas conectivas podemos obtener todas las de un conjunto de conectivas del que ya sabemos que es completo, ellas mismas son entonces completas. Por ejemplo, las equivalencias para $\neg$ y $\wedge$ a partir de $\mid$ son las siguientes:

$\neg\alpha \quad \dashv\vDash \alpha|\alpha$
$\alpha\wedge\beta \quad \dashv\vDash (\alpha|\beta)|(\alpha|\beta)$

El lector puede comprobar como ejercicio que estas equivalencias valen efectivamente y buscar los casos que faltan, esto es, las equivalencias para $\vee$ y para $\rightarrow$ a partir de $\mid$, y las equivalencias para $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ a partir de $\downarrow$.

6. **Formas normales**

Hemos visto que tanto $\{\neg,\wedge\}$ como $\{\neg,\vee\}$ son conjuntos completos de conectivas, por lo que sabemos entonces que $\{\neg,\wedge,\vee\}$ también lo será (aunque desde luego no será un conjunto mínimo). Toda fórmula es pues equivalente a otra que contiene sólo el negador, el conyuntor y el disyuntor. Para cada fórmula, sin embargo, hay muchas otras equivalentes que usan esas tres conectivas. Por ejemplo, la fórmula $(p \vee r) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ es equivalente a todas las siguientes (intente el lector encontrar alguna más):

$\neg(p \vee r) \vee (\neg q \wedge r)$
$\neg((p\vee r) \wedge (q\vee\neg r))$
$((\neg p\wedge\neg r) \vee \neg q) \wedge ((\neg p\wedge\neg r) \vee \mathrm{r}))$
$(\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$

$(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

Como quizás habrá advertido el lector, las cuatro últimas son peculiares. La cuarta y la sexta están formadas por una secuencia de disyunciones en la que cada componente es una secuencia de conyunciones en la que cada componente es, o una fórmula atómica o su negación. La quinta y la séptima están formadas por una secuencia de conyunciones en la que cada componente es una secuencia de disyunciones en la que cada componente es, o una fórmula atómica o su negación. Las secuencias de disyunciones en las que cada parte es una conyunción de fórmulas atómicas, afirmadas o negadas, se denominan *formas normales disyuntivas*. Las secuencias de conyunciones en las que cada parte es una disyunción de fórmulas atómicas, afirmadas o negadas, se denominan *formas normales conyuntivas*. Cuando, además, cada parte contiene todas las atómicas involucradas en la fórmula original, o afirmada o negada (e.e. sólo una de las dos cosas), se denominan *formas normales (disyuntivas/conyuntivas) completas*. Así pues, las cuatro últimas fórmulas son formas normales equivalentes a la fórmula $(p \vee r) \rightarrow (\neg q \wedge r)$, disyuntivas la cuarta y la sexta, conyuntivas la quinta y la séptima; y la sexta y la séptima son además completas.

Se puede probar que toda fórmula tiene equivalentes en forma normal tanto disyuntiva como conyuntiva. En lugar de probarlo, vamos a ver cómo se obtienen ambas en el ejemplo anterior y el lector podrá ver que el método es fácilmente generalizable. Esto mostrará a su vez el interés que tienen las formas normales, especialmente las completas, como modo de expresar las posibilidades veritativas de la fórmula original, pues ellas son las que expresan tales posibilidades de un modo más explícito. La idea es que, dada la tabla de verdad de una fórmula, que contiene todas sus posibilidades veritativas y en ese sentido identifica su "contenido", es sencillo construir fórmulas normales completas que tengan esas mismas posibilidades veritativas, con ese mismo contenido, esto es, lógicamente equivalentes. Veámoslo con la tabla de verdad de la fórmula de nuestro ejemplo (incluimos sólo el resultado final, compruebe el lector que es correcto):

p	$\vee\ r$	$\rightarrow$	$\neg q$	$\wedge\ r$
1	1	**0**	1	1
0	1	**0**	1	1
1	0	**0**	1	0
0	0	**1**	1	0
1	1	**1**	0	1
0	1	**1**	0	1
1	0	**0**	0	0
0	0	**1**	0	0

La tabla indica que la fórmula es verdadera para las posibilidades veritativas descritas en las filas 4, 5, 6 y 8, y falsa en las restantes. Eso quiere

decir que si los valores veritativos de p, q y r fuesen los descritos en la fila 4 o los descritos en la fila 5 o los descritos en la fila 6 o los descritos en la fila 8, entonces sería verdadera, y si fuesen los de alguna de las posibilidades restantes entonces sería falsa. La fórmula es pues verdadera si y sólo si se da alguno de los siguientes casos: (4) p y r son falsas y q verdadera; (5) p y r son verdaderas y q falsa; (6) p y q son falsas y r verdadera; (8) p, q y r son falsas. Puesto que una fórmula es falsa syss su negación es verdadera, tenemos que cada uno de estos casos se puede describir diciendo qué formulas, atómicas o sus negaciones, son el caso. Así descritos, obtenemos que la fórmula es verdadera si y sólo si se da alguno de los siguientes casos: (4) ocurren $\neg p$, q y $\neg r$; (5) ocurren p, $\neg q$ y r; (6) ocurren $\neg p$, $\neg q$ y r; (8) ocurren $\neg p$, $\neg q$ y $\neg r$. La fórmula es por tanto equivalente a

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r),$$

que es su forma normal disyuntiva completa. Así, lo que expresa la forma normal disyuntiva completa, en qué situaciones alternativas sería verdadera la fórmula original. Para obtener la forma normal conyuntiva, aplicamos un procedimiento análogo pero a los casos en los que la tabla indica que la fórmula es falsa. La fórmula es falsa si y sólo si se da alguno de los siguientes casos: (1) p, q y r son verdaderas; (2) q y r son verdaderas y p falsa; (3) p y q son verdaderas y r falsa; (7) p es verdadera y q y r falsas. Pasando de la falsedad de las atómicas a la verdad de sus negaciones, obtenemos que la fórmula original es falsa si y sólo si la fórmula

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

es verdadera. Pero entonces la fórmula original es verdadera si y sólo si esta disyunción es falsa, o lo que es igual, si la negación de esta disyunción es verdadera. Esto es, la fórmula original es verdadera si y sólo si

$$\neg ((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r))$$

es verdadera. Pero por una de las leyes de De Morgan esta disyunción negada equivale a

$$\neg (p \wedge q \wedge r) \wedge \neg (\neg p \wedge q \wedge r) \wedge \neg (p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg (p \wedge \neg q \wedge \neg r),$$

y aplicando de nuevo De Morgan a cada parte, esta conyunción es equivalente a

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r),$$

que es justamente su forma normal conyuntiva completa. Así pues, atendiendo a las posibilidades veritativas de la fórmula expresadas en la tabla de verdad, es sencillo encontrar mediante estos procedimientos las formas normales completas disyuntivas y conyuntivas equivalentes.[6]

6. Como estos ejemplos muestran, las formas normales permiten establecer un hecho interesante: para cada secuencia de 1s y 0s asociada a las interpretaciones posibles de una serie de atómicas p, q, r, ... hay una fórmula (que incluye p, q, r, ...) cuya tabla de verdad es justamente dicha secuencia.

El lector habrá notado que estos métodos para encontrar las formas normales de una fórmula α presuponen, para la forma disyuntiva, que alguna interpretación hace verdadera α, y para la forma conyuntiva que alguna otra interpretación la hace falsa. Parece entonces que no podremos hallar por estos métodos las formas disyuntivas de fórmulas contradictorias ni las formas conyuntivas de fórmulas tautológicas. Es cierto que por estos métodos no es posible, pero es posible por otros todavía más sencillos. Aunque en este caso las formas normales no serán completas. En efecto, supongamos que α es una contradicción con letras atómicas p, q y r. La definición de formas normales no excluye poder repetir las atómicas en los componentes, por tanto es inmediato encontrar una forma normal disyuntiva de α:

$$p \wedge \neg p \wedge q \wedge r$$

Esta fórmula está en forma normal disyuntiva (con una sola "parte"), es equivalente a α, pues su tabla contiene también sólo 0s. Está pues en forma normal disyuntiva, aunque no completa pues su única parte contiene una atómica tanto afirmada como negada. Nótese que también es una forma normal conyuntiva, formada por cuatro conyuntos, aunque no es completa pues cada conyunto no contiene cada una de las atómicas afirmada o negada. Encuentre el lector por un método análogo una forma normal conyuntiva para el caso en que α sea tautológica.

EJERCICIOS: 91 a 95.

7. Resolución semántica de la validez de argumentos

Ahora estamos ya en situación de poder analizar la validez de argumentos del lenguaje natural en el nivel proposicional. Aquí 'validez' se ha de entender *semánticamente*: la pretendida conclusión del argumento es *consecuencia lógica* de las premisas en el preciso sentido especificado en la sección 4. En realidad, ya estábamos en tal situación tras estudiar lo expuesto en esa sección, pues lo único que hay que hacer para analizar la validez (semántica) de un argumento en lenguaje natural es combinar dos cosas que hemos presentado por separado:

(a) identificar y formalizar las premisas y la conclusión (cap. 2 sec. 3),
(b) determinar si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas (sec. 4 de este capítulo).

Ilustraremos el procedimiento de resolución con tres ejemplos y el lector puede practicar después con los ejercicios. Se trata, pues, de determinar si un argumento es formalmente válido.

EJEMPLO: "Hume es empirista o racionalista. Si Hume es racionalista entonces acepta necesidades metafísicas. Pero Hume no acepta ningún tipo de necesidad metafísica. En consecuencia, Hume es empirista."

Enunciados atómicos:
$p \equiv$ Hume es empirista
$q \equiv$ Hume es racionalista
$r \equiv$ Hume acepta necesidades metafísicas

Formalización de premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv p \vee q$
$\alpha_2 \equiv q \rightarrow r$
$\alpha_3 \equiv \neg r$
$\beta \equiv p$

Una vez identificadas y formalizadas premisas y conclusión debemos determinar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$. En este caso, puesto que sólo hay tres fórmulas atómicas, haremos la tabla de verdad del condicional $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \rightarrow \beta$.

((p	$\vee$	q)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	r))	$\wedge$	$\neg$	r	$\rightarrow$	p
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	**1**	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	**1**	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	**1**	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	**1**	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	**1**	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	**1**	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	**1**	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	**1**	0

La tabla de verdad muestra que el condicional $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \rightarrow \beta$ es una tautología. Así pues, por el criterio de consecuencia lógica (no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a todas las premisas y falsa a la conclusión), la conclusión es consecuencia de las premisas y el argumento es por tanto válido.

EJEMPLO: "Los rusos retirarán los misiles de Cuba en el caso, y sólo en el caso, de que los americanos cumplan sus amenazas. Castro permanecerá en el poder si los rusos no retiran los misiles. Si Kennedy no dimite y Kruschev no cede entonces los americanos cumplirán sus amenazas. Ahora bien, Kennedy no dimitirá y Kruschev cederá. En consecuencia, Castro no permanecerá en el poder."

Enunciados atómicos:
$p \equiv$ los rusos retiran los misiles de Cuba
$q \equiv$ los americanos cumplen sus amenazas
$r \equiv$ Castro permanece en el poder
$s \equiv$ Kennedy dimite
$t \equiv$ Kruschev cede

Formalización de premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv p \leftrightarrow q$
$\alpha_2 \equiv \neg p \rightarrow r$
$\alpha_3 \equiv (\neg s \wedge \neg t) \rightarrow q$
$\alpha_4 \equiv \neg s \wedge t$
$\beta \equiv \neg r$

Una vez identificadas y formalizadas las premisas y la conclusión debemos determinar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$. Usaremos el método abreviado (sec. 3 más arriba) en lugar de hacer la tabla de verdad íntegra (que en este caso tendría 32 filas). Intentaremos encontrar una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión:

$p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow r$	$(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow q$	$\neg s \wedge t$	$\neg r$
1	1	1		0

Eso obliga a las siguientes asignaciones para r, s y t.

$p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow r$	$(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow q$	$\neg s \wedge t$	$\neg r$
1	1	1	1 0 1 1	0 1

Ahora trasladamos los valores obtenidos a otras ocurrencias de las mismas atómicas

$p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow r$	$(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow q$	$\neg s \wedge t$	$\neg r$
1	1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	0 1

y resolvemos a lo que ello nos fuerce:

$p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow r$	$(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow q$	$\neg s \wedge t$	$\neg r$
1	1 1	1 0 0 0 1 1	1 0 1 1	0 1

Por último, vemos si es posible asignar valores a p y q compatibles con esta situación. Efectivamente lo es, por ejemplo:

$p \leftrightarrow q$	$\neg p \rightarrow r$	$(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow q$	$\neg s \wedge t$	$\neg r$
1 1 1	0 1 1 1	1 0 0 0 1 1 1	1 0 1 1	0 1

Así, la interpretación $\mathbb{I}(p)=1$, $\mathbb{I}(q)=1$, $\mathbb{I}(r)=1$, $\mathbb{I}(s)=0$ y $\mathbb{I}(t)=1$ hace verdaderas a las cuatro premisas y falsa a la conclusión y muestra, por tanto, que el argumento es inválido. Compruebe el lector que hay otras interpretaciones de p y q con el mismo efecto.

EJEMPLO: "Los rusos retirarán los misiles de Cuba en el caso, y sólo en el caso, de que los americanos cumplan sus amenazas. Si Castro no permanece en el poder entonces los rusos retiran los misiles. Si los americanos cumplen sus amenazas, es que Kennedy no dimite y Kruschev no cede. Ahora bien, aunque Kennedy no dimitirá, Kruschev sí cederá. En consecuencia, Castro permanecerá en el poder."

Enunciados atómicos: los mismos que en el ejemplo anterior.

Formalización de premisas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y conclusión β:

$\alpha_1 \equiv p \leftrightarrow q$

$\alpha_2 \equiv \neg r \rightarrow p$

$\alpha_3 \equiv q \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$

$\alpha_4 \equiv \neg s \wedge t$

$\beta \equiv r$

Intentamos, de nuevo, dar con una interpretación de las atómicas que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión, esto es, una interpretación tal que:

$p \leftrightarrow q$	$\neg r \rightarrow p$	$q \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$	r
1	1	1	0

Pero eso no es posible en este caso, pues alguna de las atómicas debería ser a la vez verdadera y falsa:

$p \leftrightarrow q$	$\neg r \rightarrow p$	$q \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$	$\neg s \wedge t$	r
0 1 0	10 1 **1**	0 1 1 0 0 01	10 1 1	0

Así, no es posible que haya una interpretación que haga verdaderas a las cuatro premisas y falsa la conclusión. Por tanto, toda interpretación que haga verdaderas a las premisas hace también verdadera a la conclusión. La conclusión es pues consecuencia lógica de las premisas. El argumento es válido.

EJERCICIOS: 96 a 105.

Ejercicios

Sean **I**(p)=1, **I**(q)=0, **I**(r)=0 y **I**(s)=1, determinar **I**(α) para los siguientes casos: α≡

21 $(p\wedge q)\vee r$
22 $r\vee(\neg s\wedge p)$
23 $(r\vee\neg s)\wedge(r\vee p)$
24 $\neg s\rightarrow(p\vee s)$
25 $(\neg p\wedge\neg s)\rightarrow s$
26 $(p\wedge q)\vee(\neg r\leftrightarrow s)$
27 $(p\vee r)\leftrightarrow(s\wedge\neg q)$
28 $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(s\leftrightarrow\neg r)$
29 $\neg((p\rightarrow\neg q)\rightarrow(s\rightarrow r))$
30 $\neg(p\rightarrow q)\rightarrow((q\leftrightarrow r)\vee(\neg p\wedge s))$
31 $p\rightarrow(q\rightarrow(r\rightarrow(s\rightarrow(r\rightarrow(q\rightarrow p)))))$
32 $(((((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow s)\rightarrow r)\rightarrow q)\rightarrow p$
33 $(((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow s)\rightarrow(r\rightarrow(q\rightarrow p))$
34 $(p\rightarrow(r\vee\neg q))\vee((s\wedge\neg q)\leftrightarrow p)$
35 $p\wedge(\neg q\vee(r\wedge(\neg s\wedge(r\vee(\neg q\vee p)))))$

Determinar si las siguientes fórmulas son tautológicas, contingentes o contradictorias.

36 $(p\vee\neg p)\wedge p$
37 $(p\wedge p)\rightarrow p$
38 $(p\vee p)\rightarrow p$
39 $p\rightarrow(p\rightarrow p)$
40 $(p\rightarrow p)\rightarrow p$

41 $p\leftrightarrow(p\leftrightarrow p)$
42 $(p\vee p)\leftrightarrow p$
43 $(p\leftrightarrow p)\vee p$
44 $(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$
45 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$
46 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\wedge q)$
47 $p\rightarrow(q\rightarrow(q\rightarrow p))$
48 $((\neg p\vee q)\wedge\neg(q\wedge\neg p))\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$
49 $(p\vee(\neg p\wedge q))\vee(\neg p\wedge\neg q)$
50 $\neg((p\rightarrow\neg q)\rightarrow(q\rightarrow\neg p))$
51 $((p\wedge q)\rightarrow((p\wedge\neg p)\rightarrow(q\vee\neg q)))\wedge(q\rightarrow q)$
52 $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee r)$
53 $(p\wedge q)\rightarrow(p\leftrightarrow(q\vee r))$
54 $(r\rightarrow(\neg q\rightarrow p))\rightarrow(\neg(q\vee p)\rightarrow\neg r)$
55 $((p\vee q)\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\vee(q\vee p))$

Determinar si los siguientes conjuntos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de fórmulas son o no satisfacibles.

56	$\alpha_1\equiv p\rightarrow\neg p$	$\alpha_2\equiv p$		
57	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\alpha_2\equiv q\rightarrow\neg p$		
58	$\alpha_1\equiv p\vee\neg q$	$\alpha_2\equiv q\rightarrow\neg p$	$\alpha_3\equiv p\wedge q$	
59	$\alpha_1\equiv p\vee\neg q$	$\alpha_2\equiv q\rightarrow(r\wedge\neg p)$	$\alpha_3\equiv r\vee(q\leftrightarrow\neg p)$	
60	$\alpha_1\equiv p\vee\neg q$	$\alpha_2\equiv q\wedge r$	$\alpha_3\equiv p\rightarrow s$	$\alpha_4\equiv\neg(s\wedge r)$

Determinar si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\models\beta$ o no $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\models\beta$ en los siguientes casos.

61	$\alpha_1\equiv p\wedge q$	$\beta\equiv q$		
62	$\alpha_1\equiv p\vee q$	$\beta\equiv q$		
63	$\alpha_1\equiv(p\wedge q)\rightarrow r$	$\beta\equiv p\rightarrow(q\rightarrow r)$		
64	$\alpha_1\equiv\neg(p\rightarrow q)$	$\beta\equiv\neg p$		
65	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\beta\equiv\neg q\rightarrow\neg p$		
66	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\alpha_2\equiv p$	$\beta\equiv q$	
67	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\alpha_2\equiv q$	$\beta\equiv p$	
68	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\alpha_2\equiv\neg q$	$\beta\equiv\neg p$	
69	$\alpha_1\equiv p\vee q$	$\alpha_2\equiv\neg p$	$\beta\equiv q$	
70	$\alpha_1\equiv\neg q\vee p$	$\alpha_2\equiv p\rightarrow q$	$\beta\equiv p\leftrightarrow q$	
71	$\alpha_1\equiv\neg(p\wedge q)$	$\alpha_2\equiv q$	$\beta\equiv\neg p$	
72	$\alpha_1\equiv\neg(p\rightarrow q)$	$\alpha_2\equiv q$	$\beta\equiv\neg p$	
73	$\alpha_1\equiv\neg(p\rightarrow q)$	$\alpha_2\equiv\neg q$	$\beta\equiv\neg p$	
74	$\alpha_1\equiv p\vee(q\wedge r)$	$\alpha_2\equiv\neg p\vee\neg q$	$\beta\equiv p\vee r$	
75	$\alpha_1\equiv p\vee(q\wedge r)$	$\alpha_2\equiv p\rightarrow q$	$\beta\equiv\neg r$	
76	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\alpha_2\equiv\neg r\rightarrow\neg q$	$\alpha_3\equiv\neg(r\wedge\neg s)$	$\beta\equiv\neg p\vee s$
77	$\alpha_1\equiv p\vee r$	$\alpha_2\equiv\neg q\wedge r$	$\alpha_3\equiv q\rightarrow p$	$\beta\equiv r\wedge\neg p$
78	$\alpha_1\equiv p\leftrightarrow\neg r$	$\alpha_2\equiv r\rightarrow q$	$\alpha_3\equiv q\leftrightarrow s$	$\beta\equiv\neg q$
79	$\alpha_1\equiv\neg p\vee q$	$\alpha_2\equiv p\wedge r$	$\alpha_3\equiv r\rightarrow\neg q$	$\beta\equiv s$
80	$\alpha_1\equiv p\rightarrow q$	$\alpha_2\equiv r\rightarrow q$	$\alpha_3\equiv s\rightarrow q$	$\beta\equiv(p\vee r\vee s)\rightarrow q$

Determinar si $\models \beta$ o no $\models \beta$ en los siguientes casos.

81 $\beta \equiv (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$
82 $\beta \equiv (p\leftrightarrow(\neg q\vee r))\wedge(\neg r\rightarrow(q\wedge p))$
83 $\beta \equiv \neg((p\wedge(r\vee s))\rightarrow(\neg s\wedge p))$
84 $\beta \equiv (\neg q\rightarrow p)\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$
85 $\beta \equiv (p\wedge\neg q)\leftrightarrow(\neg p\wedge q)$
86 $\beta \equiv \neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
87 $\beta \equiv \neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
88 $\beta \equiv (p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
89 $\beta \equiv (p\vee (q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$
90 $\beta \equiv \neg r\rightarrow((s\wedge\neg p)\leftrightarrow(r\vee(p\rightarrow s)))$

Encontrar las formas normales conyuntivas y disyuntivas completas de las siguientes fórmulas.

91 $p\leftrightarrow\neg q$
92 $p\leftrightarrow(\neg q\wedge r)$
93 $(\neg r\vee p)\leftrightarrow(\neg q\wedge r)$
94 $(\neg r\leftrightarrow p)\vee(\neg q\rightarrow r)$
95 $\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

Determinar si las siguientes argumentaciones son válidas o no lo son; para las que no lo sean, dar una interpretación que muestre su invalidez.

96 Si el mercado es totalmente libre, un solo proveedor no puede alterar los precios. Si un solo proveedor no puede alterar los precios es que hay un gran número de proveedores. En consecuencia, el mercado es totalmente libre o no hay un gran número de proveedores.

97 Si aumentan los precios, aumentan los salarios. Los precios aumentan si el gobierno no los controla. Si el gobierno los controla, no hay inflación. Pero hay inflación. En consecuencia aumentan los salarios.

98 Si se elevan los precios o los salarios habrá inflación. Si hay inflación entonces el Congreso debe regularla o el pueblo sufrirá. Si el pueblo sufre, los congresistas se harán impopulares. El Congreso no regulará la inflación y los congresistas no se volverán impopulares. En consecuencia, los salarios no subirán.

99 O la lógica es difícil o no le gusta a muchos alumnos. Si las matemáticas son fáciles entonces la lógica no es difícil. En consecuencia, si a muchos alumnos les gusta la lógica es que las matemáticas no son fáciles.

100 Si Federico no es un inútil, estará en la comisión. Si no está en la comisión entonces es un desinteresado. Si es un desinteresado, la gente no le votará. En consecuencia, o la gente no le votará o es un inútil.

101 Si y sólo si Rogelio ha firmado el contrato y el contrato es legal y no lo ha incumplido, Eustaquio perderá el juicio. Si Rogelio no ha aceptado la oferta de Eustaquio, no ha firmado el contrato. El hecho es que Rogelio no ha aceptado la oferta de Eustaquio. En consecuencia, Eustaquio ganará la demanda judicial.

102 Como el que es menor de edad o está inhabilitado no se puede presentar a las elecciones, entonces si uno se puede presentar a las elecciones es ni es menor de edad ni está inhabilitado.

103 Si Luis no copió en el examen, no infringió sus deberes de lector y no se le suspenderá. Si la opinión de un profesor que afirma que copió prevalece, será suspendido. Luis no copió. Todo ello implica que la opinión del mencionado profesor no prevalecerá.

104 Si que el mundo es eterno implica que el alma es inmortal o no hay alma, y el alma mortal si y sólo si hay alma pero no es el cerebro, entonces, si el alma es el cerebro el mundo es eterno, o Aristóteles nos engañó a todos.

105 Si los averroistas tienen razón, entonces si el mundo es eterno no ha sido creado. Si Tomás de Aquino está en lo cierto entonces, que el mundo ha sido creado no implica que no sea eterno. Pero el mundo no puede ser eterno y no ser eterno a la vez. Por tanto, si el mundo ha sido creado y los averroistas tienen razón entonces Tomás de Aquino no la tiene.

CAPÍTULO 4

CÁLCULO DEDUCTIVO. DEDUCIBILIDAD

En el capítulo anterior hemos visto la noción "semántica" de *seguirse de*, según la cual una fórmula se sigue de otras si no pueden ser éstas verdaderas y aquella falsa. Ahora vamos a ver otra noción diferente de *seguirse de*, que puede calificarse de algorítmica o "calculística" (o también "sintáctica", pues tiene que ver con transformaciones entre filas de signos). La idea ahora es la siguiente: una fórmula β se sigue de otras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en este sentido (se *deduce* de ellas, diremos) cuando es posible obtener β operando a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ mediante ciertas reglas que especifican qué transformaciones se consideran permisibles. Estas reglas, que se llaman *reglas de inferencia*, son del tipo: "si se tienen disponibles tales y cuales secuencias de signos, entonces se puede escribir tal otra secuencia de signos". Si partiendo de las fórmulas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ conseguimos obtener β tras una serie de pasos en los que hemos ido escribiendo fórmulas intermedias siguiendo las reglas de inferencia, entonces decimos que hemos *deducido* β de $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Cuando β se puede deducir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$, ello puede hacerse de muchas maneras diferentes. Hay muchas secuencias que comienzan con $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y aplicando las reglas concluyen en β. Cada una de esas secuencias o derivaciones es una *deducción* de β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Esta noción calculística de *seguirse de* es muy diferente de la noción semántica de la sección anterior, y podrían en principio coincidir o no coincidir en los resultados. La metalógica se ocupa de estudiar la relación entre estas dos nociones. En el próximo capítulo presentaremos, casi siempre sin prueba, algunos resultados al respecto.

Cada conjunto de instrucciones para proceder en las derivaciones es un *cálculo deductivo* determinado. Hay diferentes tipos de cálculos deductivos. Los principales son los *cálculos axiomáticos*, los *cálculos de secuentes* y los *cálculos de deducción natural*. Dado el nivel introductorio de esta presentación, no vamos a explicar aquí sus diferencias. Unos son más adecuados para el estudio de propiedades metalógicas y otros son más intuitivos o de más fácil manejo para la elaboración de deducciones concretas. Pero no se diferencian en cuanto a los resultados. Si, de acuerdo con ciertos procedimientos, en uno de ellos una fórmula es deducible de otras, hay procedimientos correspondientes en los otros que dan el mismo resultado. Como a nosotros nos interesa más adquirir familiaridad con la noción de

deducción, y practicar con casos concretos, que demostrar propiedades metalógicas, vamos a utilizar el que se suele considerar más intuitivo de los tres, el cálculo de deducción natural. Un cálculo de deducción natural se especifica dando un conjunto de *reglas de inferencia primitivas* (después se pueden introducir otras *reglas derivadas* para economizar subinferencias en las derivaciones) y definiendo la noción de *deducción*, esto es, la noción de secuencia que procede de acuerdo con esas reglas. (Los cálculos axiomáticos, por contra, utilizan además unas fórmulas primitivas o *axiomas*, lo que por otro lado permite prescindir de muchas de las reglas de inferencia de los cálculos de deducción natural, aunque no de todas.[1])

1. Cálculo de deducción natural: reglas de inferencia primitivas

La idea, como hemos indicado, es que el cálculo de deducción natural establece un conjunto de reglas que indican qué fórmulas se pueden escribir en función de qué otras se tengan disponibles con anterioridad. Todas las reglas tienen la forma "se puede escribir .... si antes se dispone de —". Las reglas indican pues cómo obtener fórmulas a partir de otras. Como toda fórmula molecular tiene como signo dominante una conectiva **C**, las reglas especifican en general dos cosas: (a) qué se puede hacer si se dispone de una fórmula cuya conectiva principal es **C**, cómo se pueden usar sus partes constituyentes; y (b) en qué condiciones se puede escribir, "introducir", una fórmula cuya conectiva principal es **C** como nueva fórmula en la derivación. Las primeras son las *reglas de eliminación* de la conectiva en cuestión, a las segundas las *reglas de introducción*. Hay varias versiones posibles diferentes, pero equivalentes, de tales reglas. Las que aquí vamos a usar suelen ser las más estándar. Hay que advertir que lo que se encuentra sobre la línea continua es lo que la regla establece que se ha de tener disponible para poder escribir la fórmula que está debajo. Si sobre la línea aparece más de una fórmula (sin que ninguna de ellas tenga una marca especial), no importa el orden en que aparezcan, esto es, si la regla es de la forma

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}}{\gamma}$$

se ha de considerar admisible también la secuencia

$$\frac{\begin{array}{c}\beta\\ \alpha\end{array}}{\gamma}$$

1. El lector interesado puede encontrar una exposición informal de la imposibilidad de eliminar todas las reglas de inferencia en favor de axiomas, en el texto de Lewis Carroll "Lo que la tortuga le dijo a Aquiles" (v.c. en la traducción de textos del mismo autor *El juego de la lógica*, Alianza, Madrid 1972).

Junto al nombre de cada regla incluimos el acrónimo con el que nos referiremos a ellas en las deducciones. El lector deberá tener un poco de paciencia pues seguramente no acabará de comprenderlas hasta que hayamos visto cómo se aplican con algunos ejemplos. Recuerde que la idea básica es que las reglas le van a permitir, partiendo de las premisas, pasar de unas fórmulas a otras hasta llegar a la conclusión buscada. Esto es, las deducciones van a tener el siguiente aspecto:

1	α_1	premisa
:	:	......
n	α_n	premisa
$n+1$	γ	obtenida a partir de tal regla aplicada a tales líneas anteriores
:	φ	obtenida a partir de tal regla aplicada a .....
:	δ	obtenida a partir de ....
:	:	....
:	β	obtenida a partir ....

y se concluye la derivación, pues era la fórmula buscada.

Veamos ya cuáles son nuestras reglas de inferencia primitivas:

Doble Negación: DN

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \qquad \frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Lectura: si tiene una fórmula precedida por dos negadores, puede escribir la fórmula sin ellos; y si tiene cualquier fórmula disponible, puede escribir otra que consista en anteponer dos negadores a la anterior (como se habrá advertido, esta segunda parte de la regla no es propiamente de "eliminación" del negador; en realidad, podríamos haber dado sólo la primera parte como regla primitiva y haber probado después la segunda como regla derivada).

Introducción del Conyuntor: IC

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}}{\alpha\wedge\beta}$$

Lectura: si tiene dos fórmulas disponibles en líneas diferentes, puede escribir una conyunción que tenga ambas fórmulas como constituyentes. Nótese que la indicación que hicimos más arriba de que no importa el orden en que aparezcan α y β permite introducir tanto $\alpha\wedge\beta$ como $\beta\wedge\alpha$.

Eliminación del Conyuntor: EC

$$\frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha\wedge\beta}{\beta}$$

Lectura: si tiene una conyunción disponible, puede escribir cualquiera de sus componentes por separado. Nótese que es necesario incluir la parte derecha de la regla para poder obtener cualquiera de los dos conyuntos, pues la parte izquierda permite sólo extraer el conyunto izquierdo. Podríamos omitir la parte derecha si dispusiésemos de una regla adicional de conmutatividad del conyuntor, pero, expresando EC del modo en que lo hemos hecho, no hace falta esta nueva regla primitiva, podremos obtener la conmutatividad como regla derivada. En adelante, salvo que el caso lo requiera, omitiremos comentar la necesidad de ambas partes cuando así se presenten.

Introducción del Disyuntor: ID

α α

$\alpha \vee \beta$ $\beta \vee \alpha$

Lectura: si tiene una fórmula disponible, puede escribir su disyunción con cualquier otra fórmula en el cualquier orden.

Eliminación del Disyuntor: ED

$\alpha \vee \beta$
$\alpha \rightarrow \gamma$
$\beta \rightarrow \gamma$

γ

Lectura: si tiene disponible una disyunción y dos condicionales con el mismo consecuente y cuyos antecedentes son, en cada caso, uno los componentes de la di syunción. puede escribir separado el consecuente.

Eliminación del Condicional o Modus Ponens: MP

$\alpha \rightarrow \beta$
α

β

Lectura: si tiene disponibles un condicional y su fórmula antecedente, puede escribir separadamente el consecuente.

Introducción del bicondicional: IB

$\alpha \rightarrow \beta$
$\beta \rightarrow \alpha$

$\alpha \leftrightarrow \beta$

Lectura: si tiene disponibles dos condicionales con antecedentes y consecuentes invertidos, puede escribir un bicondicional (en cualquier orden) con las fórmulas que componen los condicionales.

Eliminación del Bicondicional: EB

$\alpha\leftrightarrow\beta$ $\alpha\leftrightarrow\beta$

$\alpha\rightarrow\beta$ $\beta\rightarrow\alpha$

Lectura: si tiene disponible un bicondicional, puede escribir cualquiera de los dos condicionales formados por las fórmulas componentes del bicondicional.

El lector habrá advertido que sólo hemos dado una regla para el negador, DN, y otra para el condicional, MP, y al comienzo dijimos que cada conectiva iba a tener dos reglas. El motivo es que las otras dos reglas que faltan, que son reglas de introducción de estas dos conectivas, son un poco diferentes de las anteriores. Son reglas que permiten escribir ciertas fórmulas *en caso de que antes se haya mostrado que de cierto supuesto es derivable cierta fórmula*. Estas son las reglas más difíciles de entender con la mera presentación y se acabarán de comprender con los ejemplos, pero comentamos brevemente su forma antes de presentarlas.

Enseguida veremos que en una deducción estará permitido introducir "supuestos". Estos supuestos son fórmulas que no son ni premisas ni se siguen de otras fórmulas anteriores. Las dos reglas que faltan son las que hacen uso de estos supuestos. La idea es la siguiente. En cualquier momento de una deducción podemos introducir una fórmula cualquiera "como supuesto". En ese caso, la marcamos a su izquierda con un guión para indicar que es un supuesto.

- α

A continuación, podemos usar esta fórmula supuesta, junto con las otras que ya teníamos, para operar con las reglas y obtener otras fórmulas.

- α
  γ por tal regla aplicada a tales líneas anteriores

Pues bien, estas dos reglas especiales que vamos a ver dicen: "si después de un supuesto se obtiene en una línea inferior cierta fórmula δ (cada una de esas dos reglas especifica cuál ha de ser esta δ), esto es, si hemos podido continuar la deducción del siguiente modo:

- α
  γ por tal regla aplicada a tales líneas anteriores

  δ por tal regla aplicada a ....

entonces se puede *cancelar* (o *cerrar*) el supuesto barrando todas las líneas entre α y δ y escribir como nueva línea de la deducción cierta fórmula φ" (de nuevo cada una de esas dos reglas especifica cuál ha de ser esta φ). Las líneas utilizadas en el tránsito, que ahora están barradas, no se pueden utilizar más:

```
:        ....
:        ....
:     ┌ α
:     │ γ  por tal regla aplicada a tales líneas anteriores
:     │ ....
:     └ δ  por tal regla aplicada a .......
:     φ    por la regla de introducción del [condicional / negador]
           aplicada a las líneas ...
```

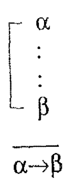
Veamos ya cuáles son estas dos reglas críticas para pasar después a su aplicación en las deducciones.

Reducción al Absurdo: RA

```
┌ α
│ :
│ :
└ β ∧ ¬β
─────────
¬α
```

Lectura: si del hecho de suponer una fórmula α, en cuyo caso deberá indicarse anteponiendo un guión a la izquierda de α, se es capaz de obtener una fórmula de la forma β∧¬β, esto es una contradicción, entonces se puede poner un guión a la izquierda de β∧¬β y cerrar el supuesto barrando todas las líneas entre α y β∧¬β (ambas inclusive), y escribir la negación de la fórmula supuesta. Una vez hecho eso, como veremos y hemos adelantado, todo lo utilizado en esa subderivación deja de ser utilizable; sólo podemos usar a partir de ahí ¬α, no las líneas barradas. Esta regla es la regla de *reductio*, un procedimiento usual en las refutaciones. La idea intuitiva es que podemos refutar cierta afirmación α, e.e. rechazarla como falsa y afirmar por tanto su negación, si mostramos que esa afirmación, junto con posiblemente otras que estén disponibles, tiene consecuencias contradictorias.

Introducción del Condicional: ICd



```
┌ α
│ :
│ :
└ β
─────
α→β
```

Lectura: si del hecho de suponer la fórmula α, en cuyo caso deberá indicarlo anteponiendo un guión a la izquierda de α, es capaz de obtener la fórmula β, entonces usted puede poner un guión a la izquierda de β y cancelar el supuesto barrando todas las líneas entre α y β (ambas inclusive), y escribir el condicional α→β. La idea es simplemente que si en el proceso de una deducción soy capaz de derivar algo de cierto supuesto, entonces puedo usar una fórmula "con esa misma implicación", e.e. un condicional con el supuesto como antecedente y lo derivado como consecuente. Una vez hecho eso, como veremos, todo lo utilizado en esa subderivación deja de ser utilizable; sólo podemos usar a partir de ahí el condicional, no las líneas barradas. Esta regla indica que, siempre que queramos obtener un condicional (y no lo podamos extraer de un bicondicional, y no lo intentemos establecer por reducción al absurdo), será necesario suponer el antecedente e intentar obtener el consecuente. Si lo logramos, cancelamos el supuesto, barramos, y escribimos el condicional.

2. Cálculo de deducción natural: derivación y deducción

Una vez vistas las reglas primitivas de inferencia, vamos a presentar las nociones de *derivación* y de *deducción*.

Derivación

Una derivación no es más que una secuencia de fórmulas que se ajusta a lo que establecen las reglas de inferencia, en la que las fórmulas se han ido introduciendo atendiendo a lo que las reglas establecen, y en la que se indica en cada paso qué es lo que permite realizarlo:

DEF Una *derivación* es una secuencia de líneas, en la que cada línea contiene una única fórmula, tal que podemos introducir-escribir una fórmula en una línea si y sólo si:
(i) es una premisa, en cuyo caso se debe indicar poniendo 'Pr' a su derecha;
(ii) es una línea utilizable anterior, en cuyo caso se pone 'Rep *n*' a su derecha, siendo *n* el número de la línea utilizable anterior donde está la fórmula (esta cláusula equivale a tener una *regla de repetición* que permite repetir fórmulas anteriores, siempre y cuando no estén barradas).
(iii) hay una regla de inferencia que permite obtenerla a partir de líneas utilizables anteriores, en cuyo caso se indica poniendo a su derecha el nombre de la regla y las líneas anteriores que se han usado en la regla;
(iv) es una suposición, en cuyo caso se debe indicar poniendo la marca '-' a su izquierda.
Son *líneas utilizables* todas y sólo las no barradas (recuérdese que RA y ICd dan lugar a líneas barradas).

Con esta noción de derivación podemos definir ya la noción de deducción de una fórmula a partir de un conjunto de otras.

DEDUCCIÓN

DEF Una *deducción* de β a partir de una serie (posiblemente vacía) de otras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ es una derivación tal que:
(i) $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ofician de premisas;
(ii) β es una línea utilizable;
(iii) no hay ningún supuesto abierto, no cancelado.[2]

(Recuérdese que RA y ICd permiten introducir fórmulas "sin tener otras disponibles con anterioridad", por ello hay que incluir la posibilidad a que la serie sea vacía, esto es, deducir algo sin premisas.)

Para fijar estos conceptos, y practicar con las reglas, veamos algunos ejemplos de derivaciones sencillas.

EJEMPLO. Deducción de r a partir de: $p \leftrightarrow \neg q$, $\neg\neg p \wedge t$ y $(t \wedge \neg q) \rightarrow r$.

Se trata de encontrar un modo de obtener $r \vee \neg s$ manipulando, de acuerdo con las reglas, las siguientes premisas.

1	$p \leftrightarrow \neg q$	Pr
2	$\neg\neg p \wedge t$	Pr
3	$(t \wedge \neg q) \rightarrow r$	Pr

Por lo general, no hay ningún procedimiento mecánico para realizar las derivaciones. Uno ha de "mirar" a las premisas y la conclusión y "ver" un camino de las primeras a la segunda. En este caso, p.e., la conclusión r está como consecuente de la tercera premisa. Si tuviésemos el antecedente $t \wedge \neg q$ ya estaría. Una parte de esa conyunción, t, está conyuntada en la segunda premisa; nos falta sólo $\neg q$, que está como una de las partes del bicondicional de la primera premisa que tiene a p al otro lado. Por tanto, si tuviésemos p ya estaría. Pero p lo tenemos, al menos tenemos su doble negación como la otra parte de la conyunción de la segunda premisa. Reconstruyamos este camino con la derivación completa:

1	$p \leftrightarrow \neg q$	Pr
2	$\neg\neg p \wedge t$	Pr
3	$(t \wedge \neg q) \rightarrow r$	Pr
4	$\neg\neg p$	EC 2
5	p	DN 4
6	$p \rightarrow \neg q$	EB 1
7	$\neg q$	MP 5,6
8	t	EC 2

2. Esta condición es crucial. En una derivación podemos introducir tantos supuesttos como queramos, pero hasta que no hayamos podido cerrarlos todos, usando RA o ICd, no podemos considerar concluída la deducción, pues de otro modo sería equivalente a introducir sin más nuevas premisas, lo que obviamente no está permitido.

9 $t \wedge \neg q$ IC 7,8
10 r MP 3,9

EJEMPLO. Deducción de $p \rightarrow \neg\neg q$ a partir de: $\neg\neg p \rightarrow (q \wedge r)$.

En este caso tenemos que obtener un condicional, por lo que (si no usamos la reducción al absurdo, y puesto que el condicional no se puede extraer de ningún bicondicional disponible como premisa u obtenible a partir de las premisas) debemos usar la regla de introducción del condicional. En ese caso, debemos empezar por suponer el antecedente p del condicional que queremos derivar e intentar obtener el consecuente $\neg\neg q$ con ayuda de la única premisa disponible:

1 $\neg\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ Pr
2 - p
?
?
$\neg\neg q$

En cuanto tuviésemos eso, podríamos cancelar el supuesto, barrar y escribir, por ICd, el condicional.

1 $\neg\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ Pr
2 p
?
?
$\neg\neg q$
$p \rightarrow \neg\neg q$ ICd

Lo único que hace falta, pues, es encontrar el camino de 1 y 2 a $\neg\neg q$. Pero eso es sencillo. En 2 tenemos p, y por doble negación tenemos $\neg\neg p$, que es el antecedente del condicional 1. Por MP podemos obtener entonces el consecuente $q \wedge r$ y separar después q, y otra vez por doble negación obtener $\neg\neg q$. Reconstruyámoslo:

1 $\neg\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ Pr
2 p
3 $\neg\neg p$ DN 2
4 $q \wedge r$ MP 1,3
5 q EC 4
6 $\neg\neg q$ DN 5
7 $p \rightarrow \neg\neg q$ ICd 2 a 6

EJEMPLO. Deducción de $\neg(p \wedge q)$ a partir de: $\neg q$.

Procederemos en este caso a la deducción por reducción al absurdo para ilustrar este método. Debemos empezar suponiendo lo contrario de lo que queremos probar, y con ese supuesto y la premisa intentar llegar a una contradicción:

1 $\neg q$ Pr
2 - $\neg\neg(p \wedge q)$
?
?
?
$\alpha \wedge \neg\alpha$

En cuanto tengamos eso podemos aplicar RA, cancelar el supuesto, barrar y escribir la negación de 2, que por doble negación será igual a la conclusión buscada. La tarea es pues obtener una contradicción a partir de 1 y 2. Pero eso es sencillo: por doble negación de 2 obtenemos $p \wedge q$, de donde extraemos q, que contradice 1. Reconstruyamos la derivación:

1	$\neg q$	Pr
2	┌ $\neg\neg(p \wedge q)$	
3	│ $p \wedge q$	DN 2
4	│ q	EC 3
5	└ $q \wedge \neg q$	IC 1,4
6	$\neg\neg\neg(p \wedge q)$	RA 2 a 5
7	$\neg (p \wedge q)$	DN 6

Como seguramente se habrá advertido, esta deducción se podría haber abreviado un poco. Podríamos haber empezado suponiendo $p \wedge q$ en lugar de $\neg\neg(p \wedge q)$ y nos habríamos ahorrado los pasos 3 y 7. Cuando lo que queremos probar por reducción al absurdo es una fórmula del tipo $\neg\gamma$, en vez de suponer $\neg\neg\gamma$ podemos suponer directamente γ y, tras obtener la contradicción, escribir $\neg\gamma$.

Antes de seguir con otros ejemplos vamos a introducir las reglas de inferencia derivadas, que nos permitirán abreviar las derivaciones "resumiendo" algunas subderivaciones que se repiten en muchas derivaciones diferentes.

3. Reglas de inferencia derivadas

Si sólo pudiésemos usar las reglas primitivas algunas derivaciones serían tremendamente largas. Puesto que algunas de las partes que incluyen se repiten en muchas deducciones, se abrevian esas series intermedias de pasos introduciendo reglas *derivadas*. Las reglas derivadas no son necesarias. Todo lo que se puede deducir con su ayuda se puede deducir sin ellas, son pues prescindibles. Sólo tienen el efecto de abreviar las deducciones "condensando" algunos pasos. Que las reglas derivadas son prescindibles significa exactamente lo siguiente:

La regla

γ

es prescindible si y sólo si hay una deducción de γ a partir de α, β, ... que usa sólo reglas primitivas.

Así, para demostrar que una derivación es efectivamente una regla derivada bastará obtener la fórmula inferior (más precisamente, algún caso del esquema inferior, pues lo que aparecen en las reglas no son fórmulas sino esquemas) a partir de las superiores sin usar dicha regla, usando sólo reglas primitivas (u otras derivadas demostradas con anterioridad). Veamos ahora, sin apenas comentario, las reglas derivadas más usuales.

Simetría del Conyuntor: SC

$$\frac{\alpha\wedge\beta}{\beta\wedge\alpha}$$

Simetría del Disyuntor: SD

$$\frac{\alpha\vee\beta}{\beta\vee\alpha}$$

Simetría del Bicondicional: SB

$$\frac{\alpha\leftrightarrow\beta}{\beta\leftrightarrow\alpha}$$

Eliminación del Disyuntor por Negación: EDN

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha\vee\beta\\ \neg\alpha\end{array}}{\beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha\vee\beta\\ \neg\beta\end{array}}{\alpha}$$

Modus Tollens: MT

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha\rightarrow\beta\\ \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

Negación del Conyuntor al Disyuntor: NCD

$$\frac{\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\alpha\vee\neg\beta} \qquad \frac{\neg\alpha\vee\neg\beta}{\neg(\alpha\wedge\beta)}$$

Negación del Disyuntor al Conyuntor: NDC

$$\frac{\neg(\alpha\vee\beta)}{\neg\alpha\wedge\neg\beta} \qquad \frac{\neg\alpha\wedge\neg\beta}{\neg(\alpha\vee\beta)}$$

Negación del Condicional al Conyuntor: NCC

$$\frac{\neg(\alpha\to\beta)}{\alpha\wedge\neg\beta} \qquad \frac{\alpha\wedge\neg\beta}{\neg(\alpha\to\beta)}$$

Definición del Condicional por el Disyuntor: DCD

$$\frac{\alpha\to\beta}{\neg\alpha\vee\beta} \qquad \frac{\neg\alpha\vee\beta}{\alpha\to\beta}$$

Para hacer explícito el sentido en que estas reglas son derivadas, mostraremos la prescindibilidad de la simetría del conyuntor, del *modus tollens* y de la parte derecha de la negación del condicional al conyuntor. El primero lo haremos por el método directo y los dos últimos por reducción al absurdo, esto es, suponiendo lo contrario de lo que queremos probar e intentando derivar una contradicción a partir de ese supuesto y de la premisas. El resto de reglas derivadas puede probarlas el lector como ejercicios (es recomendable, sin embargo, que salvo para las simetrías espere a haber adquirido cierta destreza en las derivaciones con ejercicios posteriores, pues la prueba de la mayoría de éstas reglas derivadas son más difíciles).

SC: deducir $p\wedge q$ a partir de $q\wedge p$.

1	$q\wedge p$	Pr
2	p	EC 1
3	q	EC 2
4	$p\wedge q$	IC 2,3

MT: deducir $\neg p$ a partir de $p\to q$ y $\neg q$.

1	$p\to q$	Pr
2	$\neg q$	Pr
3	┌ p	
4	│ q	MP 1,3
5	└ $q\wedge\neg q$	IC 2,4
6	$\neg p$	RA 3 a 5

NCC (parte derecha): deducir $\neg(p\to q)$ a partir de $p\wedge\neg q$.

1	$p\wedge\neg q$	Pr
2	┌ $p\to q$	
3	│ p	EC 1
4	│ q	MP 2,3
5	│ $\neg q$ EC 1	
6	└ $q\wedge\neg q$	IC 4,5
7	$\neg(p\to q)$	RA 2 a 6

4. Deducibilidad, teorematicidad, interdeducibilidad: $\vdash$

Las nociones de *deducibilidad*, *teorematicidad* e *interdeducibilidad* son las nociones "calculísticas" análogas, respectivamente, a las nociones semánticas de *consecuencia lógica*, *verdad lógica* y *equivalencia lógica*. Vamos a definirlas con precisión y a ver algunos ejemplos (el lector interesado puede intentar definirlas a partir de lo que ya hemos explicado en la presente sección y las definiciones de las nociones semánticas análogas de la sección anterior).

DEDUCIBILIDAD

La noción de deducibilidad es la que expresa el sentido calculístico de *seguirse de*. La idea central, que ya presentamos más arriba, es que una fórmula es deducible de otras si es posible derivar aquélla de éstas, si hay una deducción que tiene a éstas como premisas y a aquélla como línea utilizable. El lector debe notar que todavía no habíamos definido esta noción explícitamente. La noción que hemos definido en la sección 2 es la de *deducción* de una fórmula β a partir de otras $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Una deducción es una derivación concreta de β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$; que β sea *deducible* de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ significa que es posible realizar la derivación, es decir, que existe al menos una tal deducción. El concepto de deducibilidad presupone el de deducción, pero no son el mismo.

DEF Una fórmula β es *deducible* de un conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$de otras (y escribimos '$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$') syss$_{def}$ existe alguna deducción de β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Antes de ver algunos ejemplos, que aprovecharemos también para familiarizarnos con las reglas derivadas, es conveniente advertir un hecho que comentaremos con más detalle en la sección siguiente. Se trata de una diferencia en la *determinabilidad* (o *decidibilidad*, como diremos técnicamente) de las nociones de consecuencia lógica y deducibilidad.

Vimos que para la noción de consecuencia lógica había un criterio que permitía determinar o decidir si una fórmula era o no consecuencia de un número (finito) de otras, a saber, determinar si el condicional formado por la conyunción de las premisas como antecedente y la conclusión como consecuente es o no tautológico, lo cual a su vez es determinable mediante una tabla de verdad (o el método abreviado alternativo). Por tanto, dada una serie cualquiera (finita) de fórmulas por un lado, y cualquier otra fórmula por otro, podemos determinar mediante cierto procedimiento si la segunda es o no es consecuencia lógica de las primeras. Pues bien, no ocurre lo mismo con la noción de deducibilidad. Por todo lo que sabemos hasta ahora (en espera de lo que veamos en el próximo capítulo), esto es, usando recursos meramente "calculísticos", no

podemos en general decidir si una fórmula es o no deducible de otras. *Si sabemos* que β es deducible de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ entonces podemos *comprobar* ese hecho realizando una deducción de β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Pero si no lo sabemos, el cálculo no permite determinarlo. Podemos intentar realizar la derivación. Si tenemos éxito, si encontramos un camino de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ a β, entonces podemos asegurar que es deducible. Pero, ¿y si no tenemos éxito?, ¿y si no encontramos un modo de obtener β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$? Nótese que hemos preguntado "¿y si no *encontramos* un modo...?", y no "¿y si no *hay* un modo...?". Por supuesto que si no *hay* un modo de deducir β de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ entonces no es deducible. Pero la cuestión es si el hecho de que no *encontremos* una deducción permite concluir que no la *hay*. Eso obviamente no es así. Muchos alumnos no *encuentran* un modo de deducir una fórmula de otras y eso por supuesto no significa que no *sea* deducible, como comprueba el alumno cuando el profesor le muestra que sí lo es dando una tal deducción. A lo mejor el profesor, o quienquiera que sea muy diestro en deducciones, es capaz de encontrar siempre una deducción cuando la hay, y si no la encuentra es entonces muy probable que no la haya. Pero eso es completamente diferente de *demostrar* que no la hay. Simplemente: *presentar una deducción es demostrar que es deducible, pero no presentar ninguna deducción no es ninguna prueba de que no la haya, y en el cálculo todo lo que podemos hacer es dar o no dar deducciones.*

Así pues, sin salir del cálculo todo lo que podemos hacer es *comprobar* que β es deducible de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ cuando así es, pero no determinar si lo es *o no lo es*. Comprobaremos como ejemplos ahora algunos casos en los que se nos asegura antes que sí es deducible.

EJEMPLO: Comprobar que $\{\neg p \rightarrow s, r \vee \neg s, p \leftrightarrow (q \vee t), \neg r \wedge \neg t\} \vdash q$

1	$\neg p \rightarrow s$	Pr
2	$r \vee \neg s$	Pr
3	$p \leftrightarrow (q \vee t)$	Pr
4	$\neg r \wedge \neg t$	Pr
5	$\neg r$	EC 4
6	$\neg s$	EDN 2,5
7	$\neg\neg p$	MT 1,6
8	p	DN 7
9	$p \rightarrow (q \vee t)$	EB 3
10	$q \vee t$	MP 8,9
11	$\neg t$	EC 4
12	q	EDN 10,11

EJEMPLO: Comprobar que $\{p \rightarrow \neg s, \neg s \leftrightarrow q, q \rightarrow \neg r\} \vdash p \rightarrow \neg r$

Lo haremos primero por el método directo, e.e. sin usar la reducción al absurdo, después por reducción al absurdo y en último lugar por una combinación de ambos (suponer el antecedente de la conclusión y establecer el consecuente por reducción al absurdo).

1	$p \rightarrow \neg s$	Pr
2	$\neg s \leftrightarrow q$	Pr
3	$q \rightarrow \neg r$	Pr
4	p	
5	$\neg s$	MP 1,4
6	$\neg s \rightarrow q$	EB 2
7	q	MP 5,6
8	$\neg r$	MP 3,7
9	$p \rightarrow \neg r$	ICd 4 a 8

1	$p \rightarrow \neg s$	Pr
2	$\neg s \leftrightarrow q$	Pr
3	$q \rightarrow \neg r$	Pr
4	$\neg(p \rightarrow \neg r)$	
5	$p \wedge \neg\neg r$	NCC 4
6	p	EC 5
7	$\neg s$	MP 1,6
8	$\neg\neg r$	EC 5
9	$\neg q$	MT 3,8
10	$\neg s \rightarrow q$	EB 2
11	q	MP 7,10
12	$q \wedge \neg q$	IC 6,11
13	$\neg\neg(p \rightarrow \neg r)$	RA 4 a 12
14	$p \rightarrow \neg r$	DN 13

1	$p \rightarrow \neg s$	Pr
2	$\neg s \leftrightarrow q$	Pr
3	$q \rightarrow \neg r$	Pr
4	p	
5	r	
6	$\neg s$	MP 1,4
7	$\neg s \rightarrow q$	EB 2
8	q	MP 6,7
9	$\neg r$	MP 3,8
10	$r \wedge \neg r$	IC 5,9
11	$\neg r$	RA 5 a 10
12	$p \rightarrow \neg r$	ICd 4 a 11

EJEMPLO: Comprobar que $\{\neg p \vee s,\ q \rightarrow (r \vee \neg s),\ \neg p \leftrightarrow r,\ \neg(p \rightarrow t)\} \vdash \neg q$

Lo haremos primero por vía directa y después por reducción al absurdo.

1	$\neg p \vee s$	Pr
2	$q \rightarrow (r \vee \neg s)$	Pr
3	$\neg p \leftrightarrow r$	Pr
4	$\neg(p \rightarrow t)$	Pr
5	$p \wedge \neg t$	NCC 4

6 p	EC 5
7 $r \to \neg p$	EB 3
8 $\neg\neg p$	DN 6
9 $\neg r$	MT 7,8
10 s	EDN 1,8
11 $\neg\neg s$	DN 10
12 $\neg r \wedge \neg\neg s$	IC 9,11
13 $\neg(r \vee \neg s)$	NDC 12
14 $\neg q$	MT 2,13

1	$\neg p \vee s$	Pr
2	$q \to (r \vee \neg s)$	Pr
3	$\neg p \leftrightarrow r$	Pr
4	$\neg(p \to t)$	Pr
5	┌ q	
6	│ $r \vee \neg s$	MP 2,5
7	│ $p \wedge \neg t$	NCC 4
8	│ p	EC 7
9	│ $\neg\neg p$	DN 8
10	│ s	EDN 1,9
11	│ $\neg\neg s$	DN 10
12	│ r	EDN 6,11
13	│ $r \to \neg p$	EB 3
14	│ $\neg p$	MP 12,13
15	└ $p \wedge \neg p$	IC 8,14
16	$\neg q$	RA 5 a 15

Cuando vimos la definición de consecuencia lógica presentamos y comentamos dos hechos que podían parecer no muy intuitivos en primera instancia pero que se seguían de la definición de consecuencia lógica: de premisas contradictorias (insatisfacibles) es consecuencia cualquier cosa y las tautologías son consecuencia de cualquier cosa. Algo análogo sucede aquí con la deducibilidad. Vamos a comentar brevemente el primer caso; el segundo deberá esperar hasta que veamos la noción de teorematicidad. Para exponer el primer hecho, debemos definir antes la noción calculística de inconsistencia o contradictoriedad: una serie de fórmulas son mútuamente inconsistentes o contradictorias si de ellas se deduce una contradicción:

DEF Un conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es *inconsistente* syss$_{\text{def}}$ existe β tal que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta \wedge \neg\beta$

Ahora podemos enunciar el mencionado corolario de la noción de deducibilidad:

COROLARIO: Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es inconsistente, entonces para toda β: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$.

Es fácil ver que esto se sigue efectivamente de la noción de deducibilidad que hemos presentado. La idea es que si las premisas son contradictorias, si de ellas se deriva una contradicción, entonces podemos deducir a partir de ellas cualquier fórmula. En efecto, basta suponer lo contrario de β, "olvidarnos" después de ese supuesto y sacar la contradicción que se deriva de las premisas solas, y por último aplicar RA al supuesto:

1 α_1
: :
n α_n
: ┌ $\neg\beta$
: │ :
: └ $\gamma\wedge\neg\gamma$ [seguro que es posible obtenerla pues las premisas son inconsistentes]
: $\neg\neg\beta$ RA
: β DN

TEOREMATICIDAD

La noción de *teorema lógico* es la noción calculística análoga a la noción semántica de verdad lógica. La idea de que una fórmula "vale" independientemente del mundo se expresa ahora en este sentido calculístico diciendo que la fórmula se puede "establecer" sin recurrir a ninguna premisa previa, esto es, podemos probar la fórmula "por sí sola". O lo que es lo mismo, la fórmula es deducible del conjunto de premisas vacío (recuerde el lector que cuando definimos la noción de deducibilidad indicamos que la serie de premisas podía ser vacía):

DEF Una fórmula β es un *teorema lógico* (y escribimos '$\vdash \beta$') syss_{def} $\varnothing \vdash \beta$

Quizás el lector se pregunte cómo es posible deducir algo sin premisas, realizar una derivación o deducción sin premisas cuando las reglas de inferencia siempre parten de ciertas cosas para llegar a otras. Pero debe recordar que hay dos reglas, ICd y RA, que en la parte superior no exigen tener ninguna fórmula utilizable, sino sólo que cierta suposición haya dado lugar a cierta fórmula (y recuerde también que la definición de deducción permite introducir siempre cualquier supuesto que queramos, aunque exige poder cancelarlo para considerar acabada la deducción). Como se verá en los ejemplos que probaremos a continuación, la demostración de los teoremas siempre utiliza alguna de estas reglas.

Los siguientes son algunos (esquemas de) teoremas lógicos destacados (el lector notará que también eran -esquemas de- verdades lógicas):

(1) Principio de no contradicción: $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
(2) Ley del tercio excluso: $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
(3) Principio de identidad: $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$
(4) Ley de Clavius: $\vdash (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

(5) Reductio: $\vdash (\alpha \to \beta \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$
(6) Ley de Escoto: $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
(7) Ley de Peirce: $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
(8) Afirmación de antecedente: $\vdash ((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$
(9) Negación de consecuente: $\vdash ((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$
(10) Antecedente contradictorio: $\vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \to \beta$
(11) Consecuente válido: $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$

Demostraremos, a modo de ejemplo, el principio de no contradicción, el del tercio excluso y la ley de Escoto (el lector puede hacer el resto como ejercicio).

EJEMPLO: Comprobar $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

1	┌ $\neg\neg(p \wedge \neg p)$	
2	└ $p \wedge \neg p$	DN 1
3	$\neg\neg\neg(p \wedge \neg p)$	RA 1a 2
4	$\neg(p \wedge \neg p)$	DN3

EJEMPLO: Comprobar $\vdash p \vee \neg p$

1	┌ $\neg(p \vee \neg p)$	
2	└ $\neg p \wedge \neg\neg p$	NDC 1
3	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	RA 1 a 2
4	$p \vee \neg p$	DN 3

Nótese que la línea 2 es una contradicción, una fórmula del tipo $\beta \wedge \neg\beta$, siendo en este caso β la fórmula $\neg p$.

EJEMPLO: Comprobar $\vdash \neg p \to (p \to q)$

1	┌ $\neg p$	
2	│ ┌ $\neg(p \to q)$	
3	│ │ $p \wedge \neg q$	NCC 2
4	│ └ p	EC 3
5	│ $p \wedge \neg p$	IC 1,4
6	│ $\neg\neg(p \to q)$	RA 2 a 5
7	└ $p \to q$	DN 6
8	$\neg p \to (p \to q)$	ICd 1 a 7

Con la noción de teorema lógico podemos presentar ahora el segundo de los corolarios sobre deducibilidad a que hicimos referencia más arriba, esto es, el análogo calculístico del hecho semántico consistente en que las tautologías son consecuencia de cualesquiera fórmulas. Su análogo ahora es simplemente que los teoremas lógicos son deducibles de cualquier conjunto de premisas:

COROLARIO: Si $\vdash \beta$ entonces para cualesquiera $\alpha_1, ..., \alpha_n$: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$.

Es sencillo mostrar por qué es así: si β es un teorema lógico, se puede deducir sin premisas; por tanto, podemos iniciar la derivación poniendo

como premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$, nos "olvidamos" después de ellas y obtenemos β "por sí sola". El resultado es una derivación que cumple la definición de deducción de β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

INTERDEDUCIBILIDAD

La noción de *interdeducibilidad* es la noción calculística análoga a la noción semántica de equivalencia lógica. La idea, recuerde el lector, es que algunos pares de fórmulas "dicen lo mismo", y recordemos también que intuitivamente una fórmula *se sigue* de otras cuando lo que dicen éstas incluye lo que dice aquélla. En el sentido que ahora estamos siguiendo, una fórmula se sigue de otra si puede ser deducida a partir de ella. Es entonces natural reconstruir la idea de que dos fórmulas α y β dicen lo mismo si β se sigue de α y α se sigue de β, lo que en nuestro actual sentido calculístico significa que cada una se deduce de la otra:

DEF Dos fórmulas α y β son *interdeducibles* (y escribimos '$\alpha \dashv\vdash \beta$') syss$_{\text{def}}$ $\{\alpha\} \vdash \beta$ y $\{\beta\} \vdash \alpha$.

Las siguientes son algunos pares de (esquemas de) fórmulas interdeducibles especialmente destacadas (el lector notará que eran también esquemas de equivalencias lógicas)

(12) Doble negación: $\alpha \dashv\vdash \neg\neg\alpha$
(13) Conmutatividad de la conyunción: $\alpha\wedge\beta \dashv\vdash \beta\wedge\alpha$
(14) Conmutatividad de la disyunción: $\alpha\vee\beta \dashv\vdash \beta\vee\alpha$
(15) Asociatividad de la conyunción: $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma \dashv\vdash \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$
(16) Asociatividad de la disyunción:$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma \dashv\vdash \alpha\vee(\beta\vee\gamma)$
(17) Distributividad de la conyunción respecto de la disyunción: $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma) \dashv\vdash (\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$
(18) Distributividad de la disyunción respecto de la conyunción: $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma) \dashv\vdash (\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$
Leyes de De Morgan:
(19) $\neg(\alpha\wedge\beta) \dashv\vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
(20) $\neg(\alpha\vee\beta) \dashv\vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Las tres primeras y las leyes de De Morgan se siguen inmediatamente de reglas de inferencia, ya sean primitivas (primer caso) o derivadas (restantes). Probaremos aquí tan sólo la distributividad de la disyunción respecto de la conyunción (el lector puede hacer los otros casos como ejercicio).

EJEMPLO: Comprobar que $p\vee(q\wedge r) \dashv\vdash (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

Para ello hay que comprobar tanto $\{ p\vee(q\wedge r) \} \vdash (p\vee q)\wedge(p\vee r)$ como $\{(p\vee q)\wedge(p\vee r)\} \vdash p\vee(q\wedge r)$

Comprobación de $\{ p\vee(q\wedge r) \} \vdash (p\vee q)\wedge(p\vee r)$ (dejamos una subderivación para que la complete el lector):

1	$p\lor(q\land r)$	Pr
2	┌ $\neg(p\lor q)$	
3	│ $\neg p\land\neg q$	NDC 2
4	│ $\neg p$	EC 3
5	│ $q\land r$	EDN 1,4
6	│ q	EC 5
7	│ $\neg q$	EC 3
8	└ $q\land\neg q$	IC 6,7
9	$\neg\neg(p\lor q)$	RA 2a 8
10	$p\lor q$	DN 9
11	┌ $\neg(p\lor r)$	
.	│ ⋮	
.	│ ⋮	
19	└ $p\lor r$	DN 18
20	$(p\lor q)\land(p\lor r)$	IC 10,19

Comprobación de $\{(p\lor q)\land(p\lor r)\}\vdash p\lor(q\land r)$:

1	$(p\lor q)\land(p\lor r)$	Pr
2	┌ $\neg(p\lor(q\land r))$	
3	│ $\neg p\land\neg(q\land r)$	NDC 2
4	│ $\neg p$	EC 3
5	│ $p\lor q$	EC 1
6	│ q	EDN 4,5
7	│ $p\lor r$	EC 1
8	│ r	EDN 4,7
9	│ $q\land r$	IC 6,8
10	│ $\neg(q\land r)$	EC 3
11	└ $(q\land r)\land\neg(q\land r)$	IC 9,10
12	$\neg\neg(p\lor(q\land r))$	RA 2a11
13	$p\lor(q\land r)$	DN 12

Es fácil probar que la interdeducibilidad, como ocurría en semántica con la equivalencia lógica, es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) y también (esto es más difícil de probar, pero también cierto) que satisface un principio análogo al de sustitutividad de equivalentes, en este caso el principio de sustitutividad de subfórmulas interdeducibles: si en una fórmula sustituimos una subfórmula de ella por otra interdeducible, el resultado es interdeducible con la original.

COROLARIO: Para toda α: $\alpha\dashv\vdash\alpha$
Para toda α, β: Si $\alpha\dashv\vdash\beta$ entonces $\beta\dashv\vdash\alpha$
Para toda α, β, γ: Si $\alpha\dashv\vdash\beta$ y $\beta\dashv\vdash\gamma$ entonces $\alpha\dashv\vdash\gamma$

COROLARIO: Para toda α, β, γ, δ: si β es una subfórmula de α, $\beta\dashv\vdash\gamma$ y δ es el resultado de sustituir β por γ en α, entonces $\delta\dashv\vdash\alpha$

Concluiremos esta sección viendo que entre las nociones de *deducibilidad*, *teorematicidad* e *interdeducibilidad* se dan relaciones análogas a las que vimos en el capítulo anterior que se daban entre las nociones semánticas de consecuencia, verdad lógica y equivalencia:

(a) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$ syss $\vdash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$.
En efecto: Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$, entonces hay una deducción que parte de α_1, ..., α_n y obtiene β. Pero entonces, suponiendo el antecedente $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$ y usando EC también obtendremos β, por lo que dicho condicional, usando ICd, es derivable sin premisas, es un teorema. Por otro lado, si $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ es un teorema lógico, podemos probarlo en cualquier momento en una deducción; así que si tenemos como premisas α_1, ..., α_n, las conyuntamos, probamos ese teorema y aplicamos después MP para obtener β, con lo que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$.

(b) $\alpha \dashv\vdash \beta$ syss $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.
En efecto: Supongamos que $\alpha \dashv\vdash \beta$. Entonces β es derivable de α y viceversa. Por tanto, si supusiésemos α podríamos demostrar β y obtener entonces $\alpha \rightarrow \beta$ como teorema. Y análogamente con $\beta \rightarrow \alpha$. Y por tanto, usando IB, podríamos probar como teorema $\alpha \leftrightarrow \beta$. Para la otra dirección, supongamos que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Es inmediato entonces que β es deducible de α: extraemos $\alpha \rightarrow \beta$ del bicondicional y por MP tenemos β. Análogamente α es deducible de β. Así, si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es un teorema entonces α y β son interdeducibles.

(c) $\alpha \dashv\vdash \beta$ syss $\{\alpha\} \vdash \beta$ y $\{\beta\} \vdash \alpha$
Inmediato a partir de los anteriores.

EJERCICIOS: 106 a 135.

5. Interdefinibilidad de conectores

En el capítulo anterior (sec. 5) vimos el sentido semántico en que se podían definir unos conectores a partir de otros: la fórmula con un conector principal es lógicamente equivalente a otra que no contiene esa conectiva. Y vimos la noción de conjunto mínimo de conectores y algunos ejemplos. Algo semejante se puede decir aquí.

Dada una fórmula $\alpha \mathbf{C} \beta$ con **C** como conectiva principal que conecta α y β (para simplificar la exposición supondremos que **C** no ocurre ni dentro de α ni dentro de β), hay otras fórmulas *interdeducibles* con ella y que no contienen la conectiva **C**. De hecho, para las conectivas binarias estándar que venimos manejando, esas fórmulas alternativas sin la conectiva son exactamente las mismas que vimos entonces. Así, por ejemplo, valen los siguientes casos de (esquemas de) fórmulas interdeducibles:

$\alpha \vee \beta \quad \dashv\vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
$\alpha \rightarrow \beta \quad \dashv\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \dashv\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

Comprobaremos sólo el primero (el lector puede hacer los restantes, así como los correspondientes a usar otras conectivas en la parte derecha).

1	$p \vee q$	Pr
2	$\neg p \wedge \neg q$	
3	$\neg p$	EC 2
4	q	EDN 1,3
5	$\neg q$	EC 2
6	$q \wedge \neg q$	IC 4,5
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	RA 2 a 6

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	Pr
2	$\neg\neg p \vee \neg\neg q$	NCD 1
3	$\neg\neg p$	
4	p	DN 4
5	$p \vee q$	ID 4
6	$\neg\neg p \rightarrow p \vee q$	ICd 3 a 5
7	$\neg\neg q$	
8	q	DN 7
9	$p \vee q$	ID 8
10	$\neg\neg q \rightarrow p \vee q$	ICd 7 a 9
11	$p \vee q$	ED 2, 6, 10

Note el lector que no era posible pasar directamente de la línea 2 a la 11 por DN. La regla DN dice (en la dirección que aquí nos interesa): "si la fórmula utilizable en la línea consiste en dos negaciones antepuestas a otra fórmula, entonces puede escribir esta segunda fórmula sin las dos negaciones que la antecedían". Pero la fórmula de 2 no es una formula así, sino una *disyunción* de fórmulas tales. Es preciso pues extenderse un poco más en la deducción. Otra posibilidad es introducir el paso de 2 a 11 como regla derivada, cuya derivabilidad habría que probar (que es justamente lo que hemos hecho entre las líneas 2 y 11).

Así pues, hay fórmulas interdeducibles con otras que no contienen su conectiva principal. Esto es estrictamente análogo a lo que vimos en semántica. Ahora bien, el sentido en el que esto implica que unos conectores son *definibles* o *eliminables* en favor de los otros es un poco distinto. No se trata de que esas *interdefinibilidades* hagan eliminables por sí mismas a una de las conectivas, pues, como se ha visto, en la prueba de interdefinibilidad se usa la conectiva en cuestión, junto con las reglas que la gobiernan. Lo que muestra la interdefinibilidad es que podemos eliminar una conectiva *y sus reglas de inferencia* a partir de otras en el siguiente sentido: las reglas de inferencia primitivas que gobiernan esa conectiva se convertirían en reglas derivadas si utilizáramos la fórmula interdeducible como abreviatura/definición. Ilustrémoslo con el caso de la disyunción, el condicional y el negador.

Es fácil ver que $p \vee q$ es interdeducible con $\neg p \rightarrow q$. ¿En qué sentido hace eso eliminable al disyuntor en favor del condicional y el negador?

En el siguiente: las reglas primitivas del disyuntor podrían probarse como derivadas si la fórmula $p \vee q$ se considerase una abreviatura notacional, una definición, de la fórmula $\neg p \rightarrow q$. Consideremos por ejemplo la regla de introducción del disyuntor, que nos permite pasar directamente de q a $p \vee q$. Pues bien, mostraremos que esta regla es derivable de la definición si podemos pasar de la fórmula que define a q a la que define a $p \vee q$ usando las otras reglas (que no presupongan las de la disyunción). La fórmula que define a $p \vee q$ es, como hemos visto, $\neg p \rightarrow q$. La que define a q es q misma, pues no contiene ninguna disyunción. Así que lo que debemos ver ahora es si es posible derivar $\neg p \rightarrow q$ a partir de q sin usar las reglas de la disyunción:

q
?
?
?
$\neg p \rightarrow q$

Veamos que sí es posible:

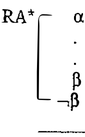
1	q	Pr
2	┌ $\neg p$	
3	└ q	Rep
4	$\neg p \rightarrow q$	ICd 2a3

Y lo mismo habría que hacer con la regla de eliminación del disyuntor. Así, lo que ahora hacemos con el disyuntor *y sus reglas* podemos hacerlo "equivalentemente" sin esa conectiva y sin sus reglas. En este preciso sentido unas conectivas son eliminables también aquí en función de otras. Por tanto, podríamos haber dado un cálculo que incluyera p.e. sólo $\neg$ y $\rightarrow$ junto con sus reglas primitivas y que fuese "equivalente" al nuestro en el sentido de que, definiendo $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$ del siguiente modo

$\alpha \wedge \beta \equiv_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$
$\alpha \vee \beta \equiv_{def} \neg \alpha \rightarrow \beta$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv_{def} \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$

obtendríamos como reglas derivadas las que ahora son reglas primitivas de $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$ (pruébelo como ejercicio el lector interesado).[3]

3. Para el caso del conyuntor $\wedge$, habría que usar una formulación diferente de la regla de reducción al absurdo, pues hemos formulado RA usando el conyuntor, por lo que en esa forma no se podría usar para obtener como derivadas las reglas del conyuntor a partir de otras que no usen el conyuntor. Es posible, y fácil, dar otra formulación de RA que no use el conyuntor:



6. **Prueba deductiva de la validez de un argumento**

Por todo lo que se ha dicho, debe estar claro que en el cálculo no podemos "determinar" si un argumento es válido. Lo único que podemos hacer es, cuando es válido, probar que lo es encontrando una deducción que parta de las premisas y obtenga la conclusión. Para ello no necesitamos más que combinar dos cosas que ya sabemos:

(a) identificar y formalizar las premisas y la conclusión;
(b) derivar en el cálculo la conclusión de las premisas.

EJEMPLO: Comprobar haciendo la deducción que el siguiente argumento es válido: "Los rusos retirarán los misiles de Cuba en el caso, y sólo en el caso, de que los americanos cumplan sus amenazas. Si Castro no permanece en el poder entonces los rusos retiran los misiles. Si los americanos cumplen sus amenazas, es que Kennedy no dimite y Kruschev no cede. Ahora bien, aunque Kennedy no dimitió, Kruschev sí cedió. En consecuencia, Castro permanecerá en el poder."

Enunciados atómicos:
$p \equiv$ los rusos retiran los misiles de Cuba
$q \equiv$ los americanos cumplen sus amenazas
$r \equiv$ Castro permanece en el poder
$s \equiv$ Kennedy dimite
$t \equiv$ Kruschev cede

Formalización de premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv p \leftrightarrow q$
$\alpha_2 \equiv \neg r \rightarrow p$
$\alpha_3 \equiv q \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$
$\alpha_4 \equiv \neg s \wedge t$
$\beta \equiv r$

Comprobación de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vdash \beta$

Método directo:

1	$p \leftrightarrow q$	Pr
2	$\neg r \rightarrow p$	Pr
3	$q \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$	Pr
4	$\neg s \wedge t$	Pr
5	t	EC 4
6	$\neg\neg t$	DN 5
7	$\neg\neg s \vee \neg\neg t$	ID 6
8	$\neg(\neg s \wedge \neg t)$	NCD 7
9	$\neg q$	MT 3,8
10	$p \rightarrow q$	EB 1
11	$\neg p$	MT 9, 10
12	$\neg\neg r$	MT 2,11
13	r	DN 12

Método indirecto (e.e., suponer que la conclusión es falsa y buscar una contradicción):

1	$p \leftrightarrow q$	Pr
2	$\neg r \rightarrow p$	Pr
3	$q \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$	Pr
4	$\neg s \wedge t$	Pr
5	$\neg r$	
6	p	MP 2,5
7	$p \rightarrow q$	EB 1
8	q	MP 7, 8
9	$\neg s \wedge \neg t$	MP 3,8
10	t	EC 4
11	$\neg t$	EC 9
12	$t \wedge \neg t$	IC 10,11
13	$\neg\neg r$	RA 5 a 12
14	r	DN 13

EJERCICIOS: 136 y 141.

Ejercicios

Demostrar $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ para los siguientes casos.

106	$\alpha_1 \equiv p \rightarrow \neg q$	$\beta \equiv q \rightarrow \neg p$			
107	$\alpha_1 \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\beta \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$			
108	$\alpha_1 \equiv p$	$\beta \equiv p \wedge (p \vee q)$			
109	$\alpha_1 \equiv \neg(p \rightarrow q)$	$\beta \equiv p \wedge \neg q$			
110	$\alpha_1 \equiv p \wedge q$	$\beta \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$			
111	$\alpha_1 \equiv p \rightarrow q$	$\alpha_2 \equiv q \rightarrow r$	$\beta \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$		
112	$\alpha_1 \equiv p \leftrightarrow q$	$\alpha_2 \equiv q \leftrightarrow r$	$\beta \equiv r \leftrightarrow p$		
113	$\alpha_1 \equiv p \wedge (q \vee \neg r)$	$\alpha_2 \equiv p \rightarrow \neg q$	$\beta \equiv \neg r$		
114	$\alpha_1 \equiv \neg q \vee s$	$\alpha_2 \equiv s \leftrightarrow \neg r$	$\beta \equiv \neg(q \wedge r)$		
115	$\alpha_1 \equiv r \vee (p \rightarrow \neg q)$	$\alpha_2 \equiv p \wedge \neg r$	$\beta \equiv \neg q$		
116	$\alpha_1 \equiv p \rightarrow q$	$\alpha_2 \equiv q \rightarrow r$	$\alpha_3 \equiv r \rightarrow p$	$\beta \equiv p \leftrightarrow q$	
117	$\alpha_1 \equiv (p \vee q) \rightarrow r$	$\alpha_2 \equiv p$	$\alpha_3 \equiv \neg q$	$\beta \equiv p \rightarrow r$	
118	$\alpha_1 \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$	$\alpha_2 \equiv r \rightarrow s$	$\alpha_3 \equiv p \wedge \neg s$	$\beta \equiv \neg q$	
119	$\alpha_1 \equiv \neg p \rightarrow (\neg q \vee r)$	$\alpha_2 \equiv \neg q \rightarrow t$	$\alpha_3 \equiv \neg r$	$\beta \equiv \neg t \rightarrow p$	
120	$\alpha_1 \equiv p \rightarrow (q \vee r)$	$\alpha_2 \equiv r \rightarrow t$	$\alpha_3 \equiv q \rightarrow s$	$\beta \equiv p \rightarrow (t \vee s)$	
121	$\alpha_1 \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$	$\alpha_2 \equiv (s \wedge \neg t) \rightarrow u$	$\alpha_3 \equiv (r \wedge u) \rightarrow p$	$\beta \equiv (r \wedge s \wedge \neg t) \rightarrow q$	
122	$\alpha_1 \equiv \neg p \vee q$	$\alpha_2 \equiv r \rightarrow \neg q$	$\alpha_3 \equiv p \wedge r$	$\beta \equiv s$	
123	$\alpha_1 \equiv \neg p \rightarrow \neg q$	$\alpha_2 \equiv r \rightarrow \neg p$	$\alpha_3 \equiv q \vee s$	$\alpha_4 \equiv \neg s$	$\beta \equiv \neg r$
124	$\alpha_1 \equiv (p \wedge r) \rightarrow \neg(s \wedge t)$	$\alpha_2 \equiv p$	$\alpha_3 \equiv \neg s \rightarrow \neg p$	$\alpha_4 \equiv p \rightarrow t$	$\beta \equiv \neg r$
125	$\alpha_1 \equiv (p \vee r) \rightarrow \neg(s \wedge t)$	$\alpha_2 \equiv p$	$\alpha_3 \equiv \neg s \rightarrow \neg p$	$\alpha_4 \equiv p \rightarrow t$	$\beta \equiv q \wedge \neg t$

Demostrar $\vdash \beta$ en los siguientes casos.

126 $\beta \equiv \neg(p\leftrightarrow\neg p)$
127 $\beta \equiv ((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q))\rightarrow\neg p$
128 $\beta \equiv \neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
129 $\beta \equiv \neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
130 $\beta \equiv (p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$
131 $\beta \equiv (p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
132 $\beta \equiv (p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$
133 $\beta \equiv (p\wedge q)\leftrightarrow\neg(p\rightarrow\neg q)$
134 $\beta \equiv (p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg(p\wedge\neg q)\wedge(p\vee\neg q))$
135 $\beta \equiv ((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)$

136 Comprobar que el siguiente argumento es válido deduciendo la conclusión de las premisas: "Platón está en lo cierto si y sólo si Aristóteles no lo está. Si Aristóteles y los estoicos tienen razón, entonces el alma no es separable del cuerpo. Si los estoicos no tienen razón entonces el alma no es eterna. Pero el alma es separable y eterna. Por tanto, Platón está en lo cierto".

CAPÍTULO 5

METALÓGICA

En los dos capítulos anteriores hemos visto dos modos diferentes de hacer precisa la idea de que una afirmación *se sigue* de otras: la noción semántica de *consecuencia lógica* y la noción "calculística" de *deducibilidad*. Como dijimos al presentar el cálculo, éstas son dos nociones diferentes y, por tanto, está por ver si coinciden, si dan lugar a los mismos resultados. Durante toda la sección anterior hemos visto que en el cálculo se iban replicando resultados que habíamos encontrado antes en semántica. Ello sugiere que, aunque nociones diferentes, consecuencia y deducibilidad quizás coincidan (y lo mismo para los pares correspondientes verdad lógica / teorema lógico y equivalencia / interdeducibilidad). De estudiar esta cuestión, y otras relacionadas, se ocupa la *metalógica*. Aquí vamos a hacer una presentación muy informal de las principales propiedades metalógicas que es interesante estudiar y mencionaremos después (con algún comentario pero sin pruebas formales) cuáles de ellas se aplican al caso de la lógica proposicional.

1. Propiedades: consistencia, consistencia máxima, corrección, completud, decidibilidad

CONSISTENCIA Y CONSISTENCIA MÁXIMA

En el capítulo 4 definimos los conjuntos inconsistentes o contradictorios como aquellos de los que se deriva alguna contradicción. Puesto que vimos también que de una contradicción se sigue cualquier fórmula, se sigue que de los conjuntos inconsistentes se deducen todas las fórmulas. Un conjunto es consistente syss no es inconsistente, y por tanto, si hay algo que no se deduce de él. Esta noción de consistencia se aplica también de modo derivado a los cálculos deductivos, al conjunto de reglas de inferencia. Diremos que un cálculo (sus reglas de inferencia), es consistente cuando no permita derivar contradicciones, esto es, cuando el conjunto de sus teoremas lógicos sea consistente:

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *consistente* syss_{def} $\{\alpha \,/ \vdash_L \alpha\}$ es consistente.

El signo '$\vdash_L$' significa "deducibilidad/teorematicidad según las reglas de inferencia de C_L".

Por lo que hemos dicho, debe quedar claro que la consistencia del cálculo equivale a que no toda fórmula sea un teorema lógico, a que haya alguna fórmula que no sea teorema:

COROLARIO: El cálculo C_L del lenguaje L es *consistente* syss existe α tal que no $\vdash_L \alpha$.

La consistencia es una propiedad mínima que parece que debe cumplir un cálculo: si no es consistente es inútil pues "no distingue nada", cualquier fórmula es teorema. Una propiedad más fuerte que la consistencia (deseable en algunos conjuntos de fórmulas, pero no siempre para un cálculo) es la de *consistencia máxima*. La idea es que muchos conjuntos consistentes de fórmulas se pueden ampliar preservando su consistencia, esto es, se pueden añadir nuevas fórmulas sin que el conjunto deje de ser consistente. Pero habrá un momento en que eso no pueda ser así, en que el conjunto consistente tenga, por así decir, "el máximo de fórmulas que puede tener sin convertirse en inconsistente". Entonces decimos que es un conjunto máximamente consistente. Los conjuntos máximamente consistentes son pues conjuntos consistentes que no pueden ser ampliados sin producir inconsistencia:

DEF Un conjunto de fórmulas Σ es *máximamente consistente* syss_{def} Σ es consistente y para cualquier fórmula α que no pertenezca a Σ, $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

Si el conjunto de los teoremas lógicos de un cálculo es máximamente consistente, entonces para toda fórmula del lenguaje ocurre que, o bien ella, o bien su negación son teoremas lógicos. En efecto, si hubiese una fórmula α tal que ni $\vdash \alpha$ ni $\vdash \neg\alpha$, entonces podríamos aumentar dicho conjunto con α (o con $\neg\alpha$) sin producir contradicción. De un cálculo tal que su conjunto de teoremas lógicos es máximamente consistente se dice a veces que es *completo*, o también *absolutamente completo*. Nosotros no usaremos esta terminología para no confundir al lector con otro sentido de completud que veremos enseguida.

Corrección y completud semánticas de un cálculo

Una de las cosas que nos puede interesar de las relaciones entre consecuencia y deducibilidad es si ésta última, la deducibilidad, dadas las reglas del cálculo, es "correcta" desde la perspectiva de la semántica. Es decir, si las reglas son correctas en el sentido de si siempre que permiten *deducir* una fórmula de otras entonces esa inferencia es "correcta" desde el punto de vista semántico, esto es, esa misma fórmula es *consecuencia lógica* de esas mismas otras.

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente correcto* syss_{def} para todo conjunto de fórmulas Σ y toda fórmula β: Si $\Sigma \vdash_L \beta$ entonces $\Sigma \models_L \beta$.

En la medida en que se considere que las nociones semánticas son más básicas o fundamentales que las calculísticas, la corrección semántica se considerará una propiedad exigible al cálculo. En efecto, para muchos, desde un punto de vista estrictamente interno al cálculo no hay más motivos para preferir unas reglas de inferencia a otras que den diferentes resultados (garantizado que ambas opciones generan cálculos consistentes en sí mismos). Si se toma la semántica como "criterio", entonces sí se puede elegir un conjunto de reglas frente a otros posibles, pues será "adecuado" aquél que sea semánticamente correcto, aquél que no derive nada que no sea consecuencia. En este sentido, todas las derivaciones de ese cálculo son *correctas* desde la perspectiva semántica. Es por eso que una de las cosas que enseguida se estudia en cuanto se da una semántica para una lógica (clásica, modal, multivaluada, temporal, ...) para la que, como ocurre muy a menudo, antes ya se ha propuesto un cálculo, es si el cálculo es correcto. Es una consecuencia inmediata que en un cálculo correcto todos los teoremas lógicos son verdades lógicas:

COROLARIO: Si el cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente correcto* entonces para toda α: Si $\vdash_L \alpha$ entonces $\models_L \alpha$.

La corrección semántica es una propiedad deseable de un cálculo, pero no la única. Si un cálculo es correcto, todo lo que se obtiene en él se obtiene también en semántica, está "bien". Pero puede ocurrir que un cálculo correcto "pierda cosas", que no pueda obtener todo lo que se obtiene en semántica, que haya inferencias semánticas que el cálculo no pueda generar. Cuando ocurre eso se dice que el cálculo es (semánticamente) *incompleto*. Un cálculo completo es pues un cálculo donde esto no ocurre, es decir, un cálculo que genera todo lo que se genera en semántica. Es también inmediato que de la completud para la deducibilidad se sigue la de la teorematicidad: pueden deducirse sin premisas todas las verdades lógicas.

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente completo* syss_{def} para todo conjunto de fórmulas Σ y toda fórmula β: Si $\Sigma \models_L \beta$ entonces $\Sigma \vdash_L \beta$.

COROLARIO: Si el cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente completo* entonces para toda α: Si $\models_L \alpha$ entonces $\vdash_L \alpha$.

La corrección semántica garantiza que el cálculo no genera cosas inaceptables: todo lo que se obtiene por deducción es inferible también semánticamente. La completud garantiza que el cálculo no deja nada fuera: todo lo inferible semánticamente se puede obtener por deducción. Si un cálculo es a la vez correcto y completo, la semántica y el cálculo coinciden, *generan exactamente los mismos resultados*. Como enseguida veremos, que un cálculo de un lenguaje lógico sea a la vez correcto y completo tiene consecuencias muy beneficiosas.

DECIDIBILIDAD

Otra propiedad deseable de un cálculo es la *decidibilidad*. Un cálculo es decidible cuando disponemos de un procedimiento que en un número finito de pasos nos permite establecer si una fórmula cualquiera es o no un teorema lógico (o en general, si cierta fórmula es o no deducible de otras):

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *decidible* syss_{def} para toda fórmula α hay un procedimiento que permite establecer en un número finito de pasos si $\vdash_L \alpha$ o no $\vdash_L \alpha$.

COROLARIO: Si el cálculo C_L del lenguaje L es decidible, entonces para cualesquiera fórmulas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y β, hay un procedimiento que permite establecer en un número finito de pasos si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_L \beta$ o no $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_L \beta$.

2. Metateoremas de la lógica proposicional

Veamos ahora cómo se comporta la lógica proposicional en relación a estas propiedades. Esto es, vamos a presentar algunos metateoremas sobre L0, algunos teoremas de la metalógica de la lógica proposicional. Lo haremos sin presentar pruebas formales, con unos breves comentarios informales en alguno de ellos. En adelante, 'C_{L0}' se referirá al cálculo que hemos presentado en la sección anterior.

MT1 CORRECCIÓN: El cálculo C_{L0} es semánticamente correcto.

Establecer este resultado consiste básicamente en mostrar que las reglas de inferencia "preservan la verdad", esto es, que si las fórmulas iniciales son todas verdaderas entonces la fórmula final también lo es. Así, demostrar que una regla de la forma

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

es semánticamente correcta es probar que β es consecuencia lógica de $\alpha_1, ..., \alpha_n$, es decir, comprobar que efectivamente ocurre $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vDash_{L0} \beta$. Cuando la regla, como sucede con ICd y RA, utiliza suposiciones, e.e. cuando es de la forma

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array}\right. \\ \hline \beta \end{array}$$

para probar que es correcta sólo hace falta mostrar que β es consecuencia lógica del condicional $\alpha \rightarrow \gamma$.

El próximo metateorema es el de completud, que presentamos sin comentarios adicionales pues las indicaciones para su prueba exceden el nivel introductorio de esta exposición

MT2 COMPLETUD: El cálculo C_{L0} es semánticamente completo.

Así pues, el cálculo de la lógica proposicional es a la vez correcto y completo. En L0, por tanto, las nociones semántica y calculística de *seguirse de* coinciden exactamente en el sentido de que dan lugar a exactamente los mismos resultados:

COROLARIO: Para todo Σ y β: $\Sigma \vdash_{L0} \beta$ syss $\Sigma \models_{L0} \beta$.

Como enseguida veremos, la equivalencia entre semántica y cálculo en la lógica proposicional es muy útil, pues permite "exportar" resultados de la primera al segundo.

MT3 DECIDIBILIDAD: El cálculo C_{L0} es decidible.

Cuando presentamos el cálculo dijimos que, a diferencia de lo que ocurre en semántica, el cálculo no permite por sí mismo determinar si una fórmula se sigue o no de otras, y por tanto tampoco si una fórmula es o no un teorema lógico. Si hallamos una deducción entonces podemos asegurar que la respuesta es afirmativa, pero si no damos con ella no podemos por eso asegurar que la respuesta sea negativa. Parecería entonces que el cálculo C_{L0} no es entonces decidible. Pero aquí es donde intervienen los teoremas de corrección y completud y la anunciada posibilidad de exportar mediante ellos resultados de la semántica al cálculo. Sabemos que en semántica sí hay un procedimiento mecánico finito para determinar si una fórmula es o no una verdad lógica. Y eso es precisamente lo que nos permiten exportar al cálculo los teoremas de corrección y completud para obtener la decidibilidad de C_{L0}. En efecto, queremos determinar, para una fórmula α cualquiera, si $\vdash_{L0} \alpha$ o no $\vdash_{L0} \alpha$. Nos preguntamos primero si $\models_{L0} \alpha$ o no $\models_{L0} \alpha$, cuya respuesta sabemos determinar, p.e. mediante tablas de verdad. Si la respuesta es $\models_{L0} \alpha$, entonces por completud podemos asegurar que también $\vdash_{L0} \alpha$, pues todas las verdades lógicas son teoremas del cálculo. Si la respuesta es que no $\models_{L0} \alpha$, entonces por corrección podemos asegurar que tampoco $\vdash_{L0} \alpha$, pues sólo las verdades lógicas son teoremas del cálculo. Podemos determinar, por tanto, si una fórmula cualquiera es o no un teorema lógico del cálculo, y en eso es en lo que consiste que el cálculo sea decidible.

MT4 CONSISTENCIA: El cálculo C_{L0} es consistente.

Aquí hacemos uso nuevamente del teorema de corrección. Si C_{L0} fuese inconsistente entonces habría alguna fórmula α tal que $\vdash_{L0} \alpha$ y $\vdash_{L0} \neg\alpha$. Pero en ese caso, y puesto que C_{L0} es correcto, tendríamos también $\models_{L0} \alpha$ y $\models_{L0} \neg\alpha$. Pero eso es imposible, pues ya vimos en semántica que $\models_{L0} \neg\alpha$ si y sólo si no $\models_{L0} \alpha$.

MT5 CONSISTENCIA MÁXIMA: El conjunto de teoremas de C_{L0}, $\{\alpha / \vdash_{L0} \alpha\}$, no es máximamente consistente.

El teorema clave para justificar éste es nuevamente el de corrección. En efecto, sabemos que p.e. p no es una verdad lógica, y que $\neg p$ tampoco. Si ninguna de ellas es una verdad lógica, como C_{L0} es semánticamente correcto, tampoco serán teoremas, pues el teorema de corrección nos asegura que sólo las verdades lógicas son teoremas. Así que hay al menos una fórmula tal que ni ella ni su negación es un teorema. Pero entonces, como indicamos cuando presentamos la propiedad de consistencia máxima, es posible aumentar el conjunto de teoremas con una de tales fórmulas manteniendo su consistencia. Por tanto, el conjunto de teoremas de C_{L0} no es máximamente consistente.

EJERCICIOS: 137 a 146.

Ejercicios

137 Comprobar que las reglas del cálculo son semánticamente correctas.
138 Comprobar que se cumple el teorema de corrección para los casos de los ejercicios 106 a 135.
139 Comprobar que se cumple el teorema de completud para los casos de los ejercicios 61 a 90 que tengan respuesta afirmativa.
140 Comprobar que las fórmulas de los ejercicios 36 a 56 que son tautológicas son también teoremas lógicos.
141 Para las argumentaciones de los ejercicios 96 a 105 que sean válidas, deducir la conclusión de las premisas.

Determinar si son posibles las siguientes deducciones y, para los casos que lo sean, hacer la deducción (indicar los recursos metalógicos empleados).

142 $\{\neg p \rightarrow (q \vee \neg s)\ ,\ p \vee q\} \vdash \neg p \vee r$
143 $\{(p \vee \neg q) \rightarrow r\ ,\ r \rightarrow p \wedge q\} \vdash p$
144 $\{\neg(\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge (\neg q \vee \neg p))\} \vdash q \rightarrow \neg p$
145 $\{p \wedge \neg q\ ,\ q \wedge \neg r\ ,\ q \rightarrow p\} \vdash r \wedge p$
146 $\{\neg p \vee \neg q\ ,\ r \rightarrow p\ ,\ r \rightarrow q\} \vdash \neg r$

SEGUNDA PARTE

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

CAPÍTULO 6

EL LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Sabemos ya cómo analizar argumentos cuya validez/invalidez depende sólo de las conexiones entre enunciados. De ello se ocupa la lógica proposicional. Pero la lógica proposicional se queda, por así decir, demasiado corta. Hay argumentos que son intuitivamente válidos pero que *analizados según los recursos disponibles en lógica proposicional* resultarían inválidos. Consideremos el siguiente argumento:

Sócrates es filósofo
Todo filósofo ama la sabiduría
Nadie que ame la sabiduría prefiere el poder a la verdad
___
Sócrates no prefiere el poder a la verdad

Este argumento es válido; la conclusión *se sigue* de las premisas, la información que da la conclusión *está contenida* en la información conjunta de las premisas. Sin embargo, analizado con los recursos de la lógica proposicional, e.e. teniendo en cuenta exclusivamente la conexión entre enunciados simples y dejando éstos sin analizar, este argumento es de la forma

p
q
r
___
s

y sería, por tanto, inválido.

La consecuencia, por supuesto, no es que el argumento no sea válido, sino que los recursos vistos en lógica proposicional no son suficientes para analizar cualquier tipo de argumento, en particular argumentos como el anterior. La validez/invalidez de este tipo de argumentos depende esencialmente de la estructura interna de los enunciados simples involucrados (lo puede comprobar el lector pensando en el argumento que resulta de sustituir 'todo' por 'algún' en la segunda premisa), algo que queda al margen del análisis en lógica proposicional. La parte de la lógica que se ocupa de este tipo de argumentos es la *lógica de primer orden* (o *lógica de predicados*, o *lógica de relatores* o *lógica cuantificacional elemental*; en ade-

lante, usaremos 'L1' para abreviar). Debe quedar claro, como advertimos en la introducción, que no se trata de "lógicas diferentes", sino de partes diferentes, progresivamente más complejas, de "la" lógica (clásica). En L0 llegamos hasta cierto nivel de análisis. En L1 *ampliamos* este análisis a la estructura interna de los enunciados simples y estudiamos sus efectos en la argumentación. Lo que debemos hacer aquí, por tanto, es básicamente lo mismo que hicimos en L0: presentar el lenguaje formal, precisar la noción "semántica" de *seguirse de* y las demás nociones relacionadas con ella; precisar la noción "calculística" de *seguirse de* y las demás nociones las relacionadas; y finalmente presentar algunas de sus propiedades metalógicas, principalmente la relación entre estas dos últimas nociones. El esquema es pues básicamente el mismo. La única diferencia es la mayor complejidad, complejidad derivada de los nuevos recursos que ahora vamos a utilizar para analizar partes que antes permanecían sin analizar.

En un primer momento vamos a presentar el nivel lógico propio de L1 con alguna simplificación. Presentaremos la lógica de primer orden con signo de igualdad pero sin functores ni descriptores. Como se verá en breve, ello supone una cierta limitación, pues sin functores ni descriptores no podemos representar la estructura de nombres complejos. Ello es parcialmente insatisfactorio, pues quedan cierto tipo de expresiones complejas sin analizar, pero facilita la exposición de las ideas principales que nada pierden con dicha simplificación. Una vez hayamos presentado dichas ideas y estemos familiarizados con ellas, ampliaremos el análisis introduciendo, en pasos sucesivos, functores y descriptores.

Al igual que hicimos en la lógica proposicional, en la presentación del lenguaje vamos a seguir aquí los siguientes pasos:

— presentación de los signos primitivos (alfabeto)
— presentación de las reglas de formación de expresiones (gramática o sintaxis)
aplicación de lo anterior a la formalización de enunciados del lenguaje natural

El análisis de los enunciados simples, que antes permanecían sin analizar, va a introducir una gran complejidad en este lenguaje, en comparación con el de L0. La idea, insistimos una vez más, es la siguiente. Un enunciado como

'Si Kruschev, que es comunista, no cede, entonces no pactará con el presidente de EE.UU., pero algún otro comunista pactará con algún otro capitalista.'

se formaliza en L0 del siguiente modo:

$p \equiv$ Kruschev es comunista
$q \equiv$ Kruschev cede
$r \equiv$ Kruschev pacta con el presidente de EE.UU.
$s \equiv$ Algún otro comunista pacta con algún otro capitalista
Formalización: $p \land (\neg q \rightarrow (\neg r \land s))$

Lo que tenemos que hacer ahora es presentar los recursos lingüísticos necesarios para poder reconstruir la estructura interna de p, q, r y s de modo que podamos formalizar ese enunciado como una secuencia de signos mucho más compleja del tipo

[—/—] ∧ (¬[—/—] → (¬ [—/—] ∧ [—/—]))

Veamos ahora qué signos primitivos necesitamos para ello.

1. Alfabeto: signos primitivos

Para determinar los signos primitivos que necesitamos, además de las conectivas que ya conocemos, tenemos que identificar los diferentes tipos de expresiones subenunciativas presentes en enunciados como el anterior. Podemos distinguir los siguientes tipos:

— Expresiones como 'Kruschev', 'EE.UU.' y 'el presidente de EE.UU.'. Éstas son nombres propios o descripciones, expresiones del lenguaje natural que nombran objetos particulares.
— Expresiones como 'ser comunista', 'ser capitalista' y 'pactar con'. Son sintagmas verbales, o partes de ellos, formados por verbos atributivos junto con adjetivos o nombres comunes, o por verbos no atributivos. Estas expresiones están por propiedades de o relaciones entre objetos particulares (entendiendo ambas en sentido amplio, esto es, incluyendo acciones, como p.e. "pactar").
— Expresiones como 'algunos', 'todos', 'ningún'. Estas van a ser las partículas lógicas características de este nivel subenunciativo. Ya vimos en la introducción que si en un argumento cambiamos 'todo' por 'algún' su validez/invalidez puede verse afectada.
— Expresiones como 'otro' y 'el mismo'. Éstas expresan el sentido del verbo 'ser' como identidad (o su negación).

Con estas indicaciones introductorias, podemos presentar ya formalmente el alfabeto del lenguaje de primer orden.

CONSTANTES INDIVIDUALES

Son signos para representar las expresiones del lenguaje natural que nombran objetos particulares. Usaremos las primeras letras del abecedario en minúsculas.

$a, b, c, \ldots$

o, si queremos tener una serie ilimitada, usaremos a seguida de subíndices

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

Mediante estos signos formalizaremos nombres simples como 'Kruschev', 'EE.UU.' o 'tres', pero también cualquier otro nombre, aunque

sea complejo, como las descripciones 'el presidente de EE.UU.' o 'el menor número primo'. Esta es la simplificación inicial a la que nos referíamos más arriba. Se supone que en este nivel lógico hemos de poder expresar la complejidad estructural allí donde la haya. Por eso no representamos los enunciados simples mediante un único signo sino mediante varios combinados o estructurados entre sí. Pero la complejidad no es una característica exclusiva de los enunciados. *Todos* los enunciados tienen complejidad o estructura, pero *algunos* nombres, como las descripciones 'el presidente de EE.UU.' o 'el menor número primo', también son expresiones complejas, estructuradas. Tienen partes combinadas entre sí de cierto modo. En la medida en que el lenguaje de primer orden debe ser capaz de expresar la complejidad allí donde la hay, en esa misma medida deberá poder formalizar estas descripciones, no como expresiones simples, sino como expresiones complejas. Ello se puede hacer perfectamente, pero hacerlo ahora complicaría la exposición en aspectos que no son esenciales. Vamos a tratar de momento a todos los términos individuales del mismo modo y a representarlos mediante signos simples. En el capítulo 10 paliaremos esta deficiencia complicando nuestro alfabeto para ser capaces de hacer explícita la estructura de los términos individuales complejos.

PREDICADOS O RELATORES

Son signos para representar las expresiones predicativas y relacionales del lenguaje natural, expresiones que nombran propiedades de, o relaciones entre, individuos. Usaremos las letras del abecedario en mayúsculas

$P, Q, R, S, \ldots$

o, si queremos una serie ilimitada, usaremos la letra R seguida de subíndices

$R_1, R_2, R_3, \ldots$

Mediante estos signos formalizaremos expresiones como 'ser comunista', 'ser austero', 'pactar con', 'admirar a', 'estar entre', etc.

Las expresiones predicativas y relacionales son expresiones que, combinadas con nombres, "generan" afirmaciones o enunciados. Por ejemplo: 'ser comunista' no constituye por sí solo una afirmación, pero combinado con 'Kruschev' da lugar a la afirmación o enunciado 'Kruschev es comunista'; 'admirar a' no constituye por sí solo una afirmación, pero combinado con 'Kruschev' y 'Karl Marx' (en ese orden) da lugar al enunciado 'Kruschev admira a Karl Marx'; 'estar entre' no constituye por sí solo una afirmación, pero combinado con 'Zaragoza', 'Madrid' y 'Barcelona' (por ese orden) da lugar al enunciado 'Zaragoza está entre Madrid y Barcelona'; etc. Las expresiones predicativas y relacionales son pues expresiones *incompletas* o *insaturadas*, se "aplican a", o se "completan con", nombres para dar lugar a enunciados. Correspondientemente, en el lenguaje formal los

relatores se completarán con términos individuales para dar lugar a fórmulas. Así, p.e. si

a≡ Kruschev
C≡ ser comunista

entonces

Ca

significa que Kruschev es comunista.

Hemos visto que los relatores se aplican a términos individuales dando lugar a fórmulas, pero se habrá notado que diferentes relatores pueden precisar de diferente número de términos para ser completados totalmente. La expresión 'ser comunista' necesita de un único término para completarse. Pero no sucede lo mismo con la expresión 'admirar a'; si la completamos con un único término, p.e. 'Kruschev', obtenemos 'Kruschev admira a', lo que todavía no constituye ninguna afirmación. Esa expresión requiere dos términos para completarse. La expresión 'estar entre' requiere tres. Llamaremos *argumentos* a aquellos términos a los que se aplican los relatores. Así, diferentes relatores requieren diferente número de argumentos para generar fórmulas. Llamaremos *ariedad* de un relator al número de los argumentos que precisa. En términos informales, la ariedad de un relator es el número de "huecos" que tiene y que deben "rellenarse" para dar lugar a una fórmula. Hablaremos entonces de relatores *monarios* (aquellos que requieren un argumento), *binarios* (aquellos que requieren dos argumentos), etc. Indicaremos de momento la ariedad con un superíndice (más adelante, cuando el contexto no cause confusión, prescindiremos ellos).

Relatores monarios:
ser comunista ≡ C^1
ser filósofo ≡ F^1
ser par ≡ P^1

Relatores binarios:
admirar a ≡ A^2
estar casado con ≡ C^2
ser hermano de ≡ H^2

Relatores ternarios:
estar entre ≡ E^3
tener por progenitores a ≡ P^3
preferir ≡ F^3

Nótese que 'ser hermano de' o 'admirar a' son relatores binarios aunque, por supuesto, uno pueda ser hermano de y admirar a más de una persona. Por el hecho de que alguien tenga cuatro hermanos tal relator no pasa a ser pentaario. O mejor dicho, podríamos disponer de un relator pentaario para ello si quisiéramos, 'ser hermano de ..., ..., ... y ... ', pero sería

diferente del binario 'ser hermano de'. Ahora bien, es importante observar que dicho relator es innecesario, pues usando el relator binario repetidas veces podemos expresar lo mismo que expresaríamos con el pentaario, esto es: '... es hermano de... y ... es hermano de ... y ... es hermano de ... y es hermano de...' (poniendo en el primer hueco siempre el mismo término).

Las constantes individuales y los relatores son signos no lógicos, representan expresiones no lógicas del lenguaje ordinario. Son expresiones no lógicas en el sentido especificado en la introducción: de ellas no depende la validez/invalidez de los argumentos. Si en un argumento válido cambiamos todas las ocurrencias de una constante individual por otra constante su validez no se ve alterada, esto es, el nuevo argumento resultante es válido/inválido si el original lo era; y lo mismo sucede con los relatores. Estas expresiones no lógicas son las que cambian de un uso a otro, de un contexto a otro. Cada lenguaje de primer orden *concreto* tendrá sus propias constantes individuales y relatores. Pero, como las constantes individuales y los relatores no son signos lógicos, no afectan a la estructura o forma lógica del argumento, pues ésta depende sólo de los signos lógicos. Por tanto, la "lógica" de todos los lenguajes de primer orden concretos, e.e. aquello que determina qué esquemas argumentativos son válidos, es la misma.

Los próximos signos que vamos a ver son justamente los signos lógicos de L1, aquellos que no se pueden sustituir en un argumento (de L1) sin quizás alterar su validez/invalidez. Si en un argumento válido sustituimos las ocurrencias de 'todos' por ocurrencias de 'algunos', el nuevo argumento resultante puede ser inválido (o viceversa). Estos signos lógicos son comunes a todo lenguaje de primer orden y significan lo mismo en todo contexto. El primero tipo que vamos a presentar, las variables individuales, es un poco peculiar y quizás no se comprenda del todo su uso hasta que un poco más adelante veamos la formalización. Los otros, además de las conectivas que ya conocemos, son los cuantificadores y el signo de identidad o igualador.

VARIABLES INDIVIDUALES

Estos signos no representan ninguna expresión determinada del lenguaje natural. Son signos *implícitos* en el lenguaje natural cuando usamos el lenguaje para hacer afirmaciones *generales*, esto es, afirmaciones donde queremos decir algo, predicar algo, no de individuos concretos, sino de *individuos cualesquiera*. Por ejemplo, cuando decimos que los hombres son mortales, no decimos de nadie en concreto que caso de que sea hombre será también mortal, sino que decimos "eso" de *individuos cualesquiera*. O cuando decimos de los números que el orden de los factores no altera el producto, no decimos eso de ningún número en concreto, sino de números cualesquiera. Al lector le resultará seguramente familiar en este caso el uso de variables, pues en matemática, incluso en la más

básica, se usa ya cierta formalización que incluye variables, por ejemplo: "para cualesquiera números x e y: $x{\cdot}y{=}y{\cdot}x$".

Vamos a usar para las variables las últimas letras del abecedario en minúscula, o una de ellas seguida de subíndices si queremos disponer de una serie ilimitada:

$x, y, z, \ldots x_1, x_2, x_3, \ldots$

Nótese que éstas son variables *individuales*. Eso quiere decir que tienen la misma categoría gramatical que las constantes individuales. Las constantes individuales nombran a objetos particulares, a individuos concretos. Las variables individuales no nombran a individuos concretos sino que mediante ellas hacemos referencia, por así decir, a "individuos indeterminados". Pero ambos tipos de expresiones son de la misma categoría gramatical, ambas pueden operar como argumentos de relatores. Esto es importante, pues marca la diferencia entre la lógica de primer orden y las *lógicas de orden superior*. La lógica de primer orden usa variables *sólo* para individuos, no usa *variables relacionales*, esto es, no usa variables para propiedades o relaciones entre individuos. Sin embargo, para algunos fines puede ser interesante disponer de variables relacionales, referirse a "propiedades o relaciones indeterminadas". Estas variables relacionales serían a los relatores lo mismo que las variables individuales son a las constantes individuales. Cuando una lógica, y su lenguaje formal, dispone de ese recurso decimos que es una *lógica de segundo orden* ('L2' para abreviar). Así, si disponemos sólo de variables para individuos, estamos en L1. Si disponemos de variables para individuos, y además de variables para propiedades de y relaciones entre individuos, estamos en L2. En principio, la progresión podría seguir con variables para propiedades de propiedades de individuos, y así sucesivamente. Una cuestión distinta sería el interés de tales extensiones. Bien, el uso de las variables (y los posibles órdenes para diferentes tipos de variables) se entenderá mejor cuando veamos los cuantificadores.

Signo de identidad

Este signo representa expresiones del lenguaje natural como 'el mismo', 'es idéntico a', etc., y también se usará, combinado con el negador, para expresiones como 'distinto de', 'diferente de', etc. El signo que vamos a usar es:

$\approx$

El signo de identidad (o 'igualador' para abreviar), se comporta gramaticalmente como un relator binario (en realidad, *es* un relator binario, sólo que se destaca como signo lógico porque de él depende también la validez de ciertos argumentos). El igualador, por tanto, se combinará con pares de términos para dar lugar a fórmulas.

CUANTIFICADORES

Estos signos están por expresiones del lenguaje natural como 'todo', 'todos los', 'cualquiera', 'algún', 'algunos', 'unos', 'ningún', 'muchos', etc. Se denominan *cuantificadores* porque estas expresiones determinan, cuando usamos variables, "la cantidad" de individuos de los que se dice algo. Así, si digo 'todos los filósofos aman la sabiduría' o 'algunos filósofos aman la sabiduría', estas afirmaciones predican en cierto sentido lo mismo, pero de diferente rango de individuos. Como puede verse, hay muchas expresiones del lenguaje natural con esta función, pero usualmente se considera que en lógica basta con dos de ellas, el *universal* y el *existencial* (más adelante veremos que en realidad basta con una). Por ejemplo, disponiendo de 'algún' no es necesario 'ningún', pues puede formalizarse con la conectiva 'no' (de la que también dispondremos) y el cuantificador existencial 'algún'.

Para los cuantificadores usaremos los siguientes signos:

Cuantificador universal: $\forall$ (lectura: 'todo', 'todos los', 'los', 'cualquier', etc.)

Cuantificador existencial: $\exists$ (lectura: 'algún', 'al menos un', 'algunos', 'unos', 'muchos', 'varios', 'pocos', 'bastantes', 'la mayoría', etc.)

Las lecturas sugeridas para el cuantificador existencial requieren un importante comentario. Como se observará, en ese caso utilizamos una misma partícula lógica para toda una variedad de expresiones cuantificacionales diferentes del lenguaje natural. Todas ellas tienen en común el hecho de que lo que se dice mediante ellas se dice de "al menos uno" de los individuos del dominio de discurso. Sin embargo, en el lenguaje natural muchas de ellas tienen funciones diferentes. Y, contrariamente a lo que ocurría con las diversas expresiones conjuntivas del lenguaje natural (p.e. 'pero' y 'aunque'), en este caso la diferencia entre ellas es de carácter lógico: si en algunos argumentos cambiamos p.e. 'algunos' por 'muchos' podemos alterar su validez/invalidez. Consideremos por ejemplo el siguiente argumento:

Algunos parlamentarios ecologistas se oponen a los alimentos transgénicos

---

Algunos parlamentarios se oponen a los alimentos transgénicos

Este argumento es intuitivamente válido, pero si hacemos el cambio indicado entonces el argumento que obtenemos es inválido:

Muchos parlamentarios ecologistas se oponen a los alimentos transgénicos

---

Muchos parlamentarios se oponen a los alimentos transgénicos

La diferencia entre las diversas expresiones existenciales del lenguaje natural es pues en algunos casos una diferencia en su función lógica.

Eso quiere decir que el hecho de que aquí no distingamos entre ellas supone una limitación considerable de nuestros recursos lógicos. Aunque algunas lógicas intentan subsanar esta limitación, para la mayoría de los fines a los que usualmente se aplica la lógica clásica no tiene consecuencias muy dramáticas.[1]

Veremos enseguida que los cuantificadores son también expresiones incompletas o insaturadas que, una vez completadas, dan lugar a fórmulas. Pero a diferencia de los relatores, que se aplican a términos individuales para dar lugar a fórmulas, los cuantificadores se aplican a variables y fórmulas para dar lugar a (otras) fórmulas. Así, p.e., si

$P^1 \equiv$ pasear lentamente
$a \equiv$ Juan

entonces

P^1a

significará que Juan pasea lentamente. Y

$\exists x\, P^1x$

significará que alguien pasea lentamente.

Conectivas

En el lenguaje de la lógica de primer orden disponemos también de las conectivas de la lógica proposicional (de hecho, como dijimos, L1 es una extensión de L0):

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Signos auxiliares

Por motivos análogos a los que vimos en L0, aquí necesitaremos los paréntesis como signos auxiliares para determinar la fuerza relativa de las partículas lógicas:

), (

Estos son los signos de nuestro lenguaje formal propiamente dicho, el alfabeto de la Lógica de Primer Orden, que resume el siguiente cuadro:

1. La principal dificultad para construir una lógica que distinga los diferentes tipos de cuantificadores existenciales reside en que la función *lógica* de éstos parece depender fuertemente del contexto. En ciertos contextos, p.e., más de la mitad puede ser "muchos" y en otros (por ejemplo la cantidad de votantes en unas elecciones) puede ser "pocos". Una posibilidad es desambiguar estas expresiones utilizando expresiones porcentuales o estadísticas precisas, pero entonces no se trata ya de expresiones cuantificacionales existenciales *sensu stricto*. Otra diferencia relevante es la que hay entre "algún" y "algunos", pues parece que el segundo no es compatible con que haya sólo uno; de esto es de lo que se ocupa la parte de la lógica que estudia la cuantificación existencial *plural*.

ALFABETO DE L1

Constantes individuales:	*a, b, c, ...*
Variables individuales:	*x, y, z, ...*
Relatores:	*P, Q, R, ...*
Signo de identidad:	$\approx$
Cuantificadores:	$\forall$, $\exists$
Conectivas:	$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
Paréntesis:	), (

Además de estos signos, y como ocurría en L0, para hablar de nuestro lenguaje vamos a usar otros signos, las variables metalingüísticas.

* METAVARIABLES

Ahora necesitaremos metavariables no sólo para fórmulas sino también para términos individuales y para relatores:

Para constantes individuales: **a**, **b**, **c**, ... o $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ...
Para variables individuales: **x, y, z, v** ... o $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ...
Para términos individuales (variables o constantes): $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, ...
Para relatores: **P**, **Q**, **R**, ... o $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, ...
Para fórmulas: α, β, ... o α_1, α_2, ...

2. Gramática: Reglas de formación de fórmulas

Como dijimos en la presentación, de momento vamos a ignorar los términos individuales complejos, por lo que las expresiones complejas formadas a partir de otras más simples van a ser sólo las fórmulas. Tenemos que ver pues qué combinaciones de signos del alfabeto constituyen fórmulas. Ya sabemos cómo obtener fórmulas a partir de fórmulas y conectivas, eso es lo que especificaban las reglas de formación de L0. Ahora debemos ampliar aquellas reglas con otras nuevas que nos digan cómo se generan las fórmulas que entonces se consideraban simples (también aquí habrá aspectos convencionales, como la "posición" en que combinamos los signos, pero otros no lo serán, p.e. con qué otros signos se combina un signo). Va a haber dos casos básicos: (i) completar por la derecha un relator con el número adecuado de términos individuales (constantes o variables) y (ii) flanquear el igualador con un término a cada lado. Estos serán las fórmulas "básicas", que darán lugar a otras más complejas combinándose con conectivas y cuantificadores. En la siguiente definición 'término' refiere indistintamente tanto a constantes individuales como a variables individuales.

REGLAS DE FORMACIÓN DE FÓRMULAS

(i) Si $\mathbf{R}^n$ es un relator n-ario y $\mathbf{t}_1, \dots \mathbf{t}_n$ son términos, entonces la secuencia $\mathbf{R}^n\, \mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$ es fórmula.
(ii) Si $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, son términos, entonces la secuencia $\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2$ es fórmula.
(iii) Si α es una fórmula y $\mathbf{v}$ es una variable, entonces las secuencias $\forall \mathbf{v}\alpha$ y $\exists \mathbf{v}\alpha$ son fórmulas.
(iv) Si α es fórmula, entonces la secuencia $\neg\alpha$ es fórmula.
(v) Si α y β son fórmulas, entonces las secuencias $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ y $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ son fórmulas.
(vi) Sólo son fórmulas las secuencias que satisfacen alguna de las cláusulas anteriores.

Seguiremos también aquí las reglas de simplificación de paréntesis que ya vimos en L0.

Así, p.e. las siguientes secuencias de signos son fórmulas:

Q^1b
Q^1x
P^2ab
P^2aa
P^2ax
P^2xy
$a{\approx}b$
$y{\approx}a$
$\forall x\, P^2ax$
$\neg\, y{\approx}a$
$\exists y\, \neg y{\approx}a$
$P^2ax \wedge \neg\, y{\approx}a$
$\forall x\, P^2ax \wedge \exists y\, \neg y{\approx}a$
$\exists y\, (P^2ax \wedge \neg\, y{\approx}a)$
$\forall x \exists y\, (P^2ax \wedge \neg\, y{\approx}a)$
$P^2ax \wedge \exists y\, \neg\, y{\approx}a$
$\forall x\, (P^2ax \wedge \exists y\, \neg\, y{\approx}a)$
$\forall x\, P^2ay$
$\forall x\, P^2ab$

Y las que siguen no lo son:

Q^1R^1 (el argumento del relator Q^1 es otro relator)
Q^2x (el relator es binario y sólo tiene un argumento)
P^2axc (el relator es binario y tiene tres argumentos)
P^2aQ^3 (el segundo argumento del primer relator es un relator)
$a{\approx}bc$ (el igualador tiene a su derecha dos términos)
$y{\approx}Q^1b$ (el igualador tiene a su derecha una fórmula, no un término)
$a{\approx}x{\approx}y$ (a ninguno de los dos igualadores le flanquean sólo dos términos[2])

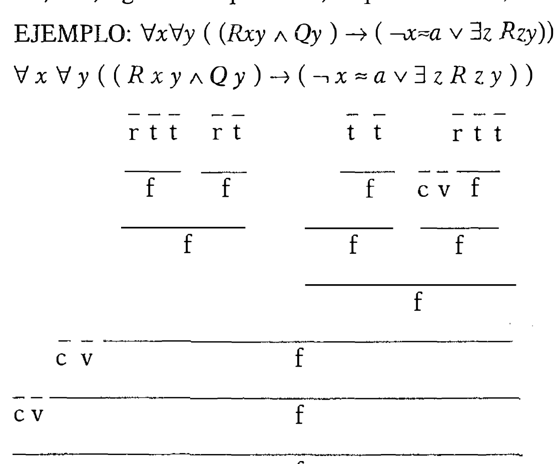
2. Otra cosa es que se adopte la convención de abreviar '$\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{t}_2 \approx \mathbf{t}_3$' mediante '$\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2 \approx \mathbf{t}_3$'. Pero de momento disponemos sólo de las reglas de formación.

$\neg\approx a$	(ni al negador le sigue una fórmula ni al igualador le flanquean términos)
$P^2ax \wedge$	(al conyuntor no le sigue una fórmula)
$\forall\ a{\approx}y$	(al cuantificador le sigue una fórmula, pero falta una variable entre ambos)
$\exists y\ \neg\approx a$	(al cuantificador le sigue una variable, pero a ésta no le sigue una fórmula)
$\forall a\ P^2ay$	(al cuantificador le sigue una constante, no una variable)
$\forall\exists x\ P^2ax$	(al cuantificador le sigue otro cuantificador, no una variable)
$P^2ax \wedge \exists y\neg\approx$	(al conyuntor no le sigue una fórmula)

Debemos ver ahora en qué sentido preciso el lenguaje de primer orden extiende o amplía el lenguaje proposicional. Lo que antes eran fórmulas sin analizar aquí son expresiones complejas, formadas por partes que se estructuran entre sí. Llamaremos ahora *fórmulas atómicas* a aquellas fórmulas que no contengan ni conectivas ni cuantificadores, esto es, a aquéllas que surgen sólo de las cláusulas (i) y (ii). En nuestra primera lista, son fórmulas atómicas las ocho prìmeras, pero por ejemplo no la novena, que no contiene conectivas pero sí un cuantificador (y otra fórmula más simple). Como puede verse, una fórmula atómica es una fórmula que no contiene ninguna otra fórmula como constituyente.

Vamos a ver algunos ejemplos un poco más complejos que resolveremos por un procedimiento parecido al que empleamos en L0. En adelante, para no hacer la escritura engorrosa, vamos a prescindir de los superíndices de los relatores y supondremos que tienen la ariedad necesaria en cada caso (siempre que a cada relator le corresponda siempre la misma ariedad, e.e. tenga siempre el mismo número de argumentos en todas sus apariciones). Las letras 'r', 't', 'f', 'c' y 'v' van a estar respectivamente por 'relator', 'término', 'fórmula', 'cuantificador' y 'variable'; y anteponiéndoles 'n', e.e. 'nr', 'nt', etc., significará que no es, respectivamente, relator, término, etc.

EJEMPLO: $\forall x\forall y\ (\ (Rxy \wedge Qy\ ) \rightarrow (\ \neg x{\approx}a \vee \exists z\ Rzy))$



EJEMPLO: $\forall x\ \forall y\ ((\ Rxy \land Q\neg y) \to (\ \neg\ x \approx Qa \lor \exists a\ Rzy\ ))$

$\forall\ x\ \forall\ y\ (\ (\ R\ x\ y \land Q \neg\ y\ ) \to (\ \neg\ x \approx Qa \lor \exists\ \ a\ \ R\ z\ y\ )\ )$

```
           r t t   r nt t        t  nt         r t t
             f      nf            nf       c  nv  f
                nf                 nf          nf
                                          nf
      c  v                nf
    c v                 nf
                       nf
```

Como muestra el próximo ejemplo, un único fallo basta para que la secuencia de signos no sea fórmula.

EJEMPLO: $\forall a \exists x \forall y\ (\ (Rxy \land Qy\ ) \to (\ \neg x \approx a \lor \exists z\ Rzy))$

$\forall\ a\ \exists\ x\ \forall\ y\ (\ (\ R\ x\ y \land Q\ y\ ) \to (\ \neg\ x \approx a \lor \exists\ z\ R\ z\ y\ )\ )$

```
             r t t   r t         t   t      r t t
               f      f            f      c v  f
                  f                f        f
                                        f
       c  v               f
     c v                  f
   c  nv                  f
                        nf
```

A partir de ahora, y para facilitar la escritura, vamos a adoptar una convención sobre las series de cuantificadores del mismo tipo, e.e. series de universales y series de existenciales. La idea es simplemente que cuando aparezcan series de cuantificadores del mismo tipo podemos abreviar la fórmula escribiendo sólo el inicial. Así,

Convención:

'$\forall$**xyz**... α' abrevia a '$\forall$**x**$\forall$**y**$\forall$**z**....α'
'$\exists$**xyz**... α' abrevia a '$\exists$**x**$\exists$**y**$\exists$**z**....α'

Por ejemplo, la secuencia que acabamos de identificar como fórmula en el primer ejemplo, se escribirá así:

$\forall xy\ ((Rxy \wedge Qy) \rightarrow (\neg x{\approx}a \vee \exists z\ Rzy))$

Para concluir con las reglas de formación, denominaremos como en L0 *subfórmula* a todas las fórmulas (diferentes de ella misma) que componen una fórmula dada. Así, por ejemplo, esta última fórmula que acabamos de escribir tiene diez subfórmulas:

$\forall y\ ((Rxy \wedge Qy) \rightarrow (\neg x{\approx}a \vee \exists z\ Rzy))$
$(Rxy \wedge Qy) \rightarrow (\neg x{\approx}a \vee \exists z\ Rzy)$
$Rxy \wedge Qy$
$\neg x{\approx}a \vee \exists z\ Rzy$
Rxy
Qy
$\neg x{\approx}a$
$\exists z\ Rzy$
$x{\approx}a$
Rzy

VARIABLES LIBRES Y LIGADAS. FÓRMULAS ABIERTAS Y SENTENCIAS

Para ciertos fines que veremos enseguida, es necesario distinguir a las variables que aparecen en una fórmula en función de su estar o no "ligadas" por un cuantificador. Los cuantificadores "ligan" las variables a las que se aplican. Una misma variable puede aparecer varias veces en una fórmula, y puede ocurrir que a algunas de sus apariciones se les apliquen cuantificadores y a otras no. Diremos que una aparición de una variable estará ligada cuando se le aplique un cuantificador. Y diremos que la variable misma estará ligada cuando todas sus apariciones lo estén. Esto permite distinguir a su vez entre fórmulas abiertas y sentencias en función, respectivamente, de que la fórmula contenga o no variables libres. Así, por ejemplo, en

$\forall x\ ((Rxy \wedge Pa) \rightarrow \exists y\ Qxyz))$

la variable x está ligada, por estar ligadas todas sus apariciones; pero la variable y está libre, pues aunque su *segunda* aparición está ligada, su primera aparición está libre; y la variable z también está libre, pues su única aparición está libre. La fórmula, por tanto, no será una sentencia sino una fórmula abierta. Veamos ahora las definiciones precisas que corresponden a estas ideas, para fijarlas después mediante algunos ejemplos.

— Una *ocurrencia de una variable en una fórmula* es cada una de las apariciones de la variable en la fórmula, salvo las apariciones inmediatamente a la derecha de un cuantificador.

Aquí hay que tener en cuenta la convención notacional anterior sobre secuencias de cuantificadores del mismo tipo. Así, puesto que $\forall xy$ Rxy es una abreviatura de $\forall x \forall y$ Rxy, la variable y aparece dos veces pero sólo tiene *una* ocurrencia, pues la otra vez que aparece lo hace inmediatamente después de un cuantificador

— El *alcance de un cuantificador* es la fórmula que le sigue: el alcance del universal en $\forall \mathbf{x} \alpha$ es α y el del existencial en $\exists \mathbf{x} \beta$ es β.

Así, por ejemplo, el alcance del universal en $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \alpha$ es $\exists \mathbf{y} \alpha$, y, teniendo en cuenta la convención notacional sobre secuencias de cuantificadores del mismo tipo, el alcance del primer universal en $\forall \mathbf{xy} \alpha$ es $\forall \mathbf{y} \alpha$.

— Una *ocurrencia de una variable en una fórmula está ligada* syss ocurre dentro del alcance de un cuantificador que tiene a esa variable inmediatamente a su derecha. Una *ocurrencia de una variable en una fórmula está libre* syss no está ligada.

Así, la única ocurrencia de la variable y en $\forall xy$ Rxy está ligada pues ocurre dentro del alcance de un cuantificador que (de acuerdo con la convención notacional mencionada) tiene la dicha variable inmediatamente a su derecha. En cambio, la única ocurrencia de la variable z en $\forall xy$ Rxz está libre, pues no ocurre dentro del alcance de un cuantificador que se aplique a esa variable.

— Una *variable está ligada en una fórmula* syss todas sus ocurrencias están ligadas. Una *variable está libre en una fórmula* syss no está ligada, esto es, si al menos una ocurrencia de la variable está libre.

Así, en la fórmula $\forall x$ $(Rxyz \vee \exists y$ $Qxyz)$, la variable x está ligada y las variables y, z están ambas libres (las dos ocurrencias de z están libres, y una de las dos ocurrencias de y está libre).

— Una fórmula es una *sentencia* (o un *enunciado*) syss no contiene variables libres. Una fórmula es una *fórmula abierta* syss no es una sentencia, esto es, si al menos una ocurrencia de al menos una variable está libre.

— A las sentencias que no contienen variables cuantificadas (p.e. Pa, o $Pa \wedge \neg Rab$) las llamaremos *enunciados particulares*, y a las que sí contienen variables cuantificadas (p.e. $\forall x$ Px, o $\exists x$ Rxa), *enunciados generales* (aunque, como en el segunda ejemplo, contenga también constantes individuales).

Nótese que, de acuerdo con esta definición, $\exists x$ $Px \wedge Rab$ es un enunciado general.

EJEMPLO: $\forall x$ $((Rxy \wedge Pa) \rightarrow \exists y$ $Qxyz)$
Hay dos ocurrencias de la variable x, dos ocurrencias de la variable y y una ocurrencia de la variable z.
El alcance de $\forall$ es $((Rxy \wedge Pa) \rightarrow \exists y$ $Qxyz)$ y el de $\exists$ es $Qxyz$
Las dos ocurrencias de x están ligadas. La segunda ocurrencia de y está ligada pero la primera está libre. La única ocurrencia de z está libre.
La variable x está ligada, y está libre y z está libre.
La fórmula es una fórmula abierta.

EJEMPLO: $\forall x\ (Rxy \wedge Pa) \rightarrow \exists y\ Qxyz$
Como antes salvo en que ahora el alcance de $\forall$ es sólo $(Rxy \wedge Pa)$. Por tanto x está ahora libre, pues su primera ocurrencia está ligada pero la segunda está ahora libre.
Nótese que lo único que ha cambiado respecto del ejemplo anterior han sido los paréntesis. Los paréntesis son pues fundamentales para determinar el alcance de los cuantificadores.

EJEMPLO: $\forall xy\ (Rxy \rightarrow \exists z\ (Qzx \vee Qzy \vee Qzz\ ))$
La variable x ocurre dos veces y las dos ligadas, y está por tanto ligada; la variable y ocurre dos veces y las dos ligadas, y está por tanto ligada; la variable z ocurre cuatro veces y las cuatro ligadas, y está por tanto ligada.

La diferencia entre fórmulas abiertas y sentencias es fundamental, pues *sólo las sentencias son verdaderas o falsas*. Una fórmula abierta es, por así decir, una afirmación "indeterminada", y por tanto no es una afirmación genuina, un acto de habla acabado verdadero o falso. Así, p.e. si

$a \equiv$ Juan
$H \equiv$ ser hermano de

entonces

Hax

no dice nada completo, está indeterminado, mientras que

Haa

sí dice algo acabado, es una afirmación completa particular (que Juan es hermano de sí mismo), y

$\exists x\ Hax$

también dice algo acabado, es una afirmación completa *general* (que Juan es hermano de alguien), pero no por ello indeterminada, está perfectamente determinado si es verdadera o falsa.

Esto es importante, pues cuando formalicemos enunciados del lenguaje natural deberemos tener cuidado en comprobar que las fórmulas que los formalizan son sentencias. Los enunciados del lenguaje natural, si están correctamente formados, son actos de habla enunciativos acabados (esto es, susceptibles de ser verdaderos o falsos) y les debe corresponder por tanto una sentencia en nuestro lenguaje formal.

¿Por qué disponer entonces de fórmulas abiertas y no sólo de sentencias en nuestra gramática? Pues, como debe haberse adivinado ya con los ejemplos, las fórmulas abiertas forman parte de las sentencias, son subfórmulas de sentencias. Las sentencias que contengan cuantificadores tienen normalmente como subfórmula una fórmula abierta; por ejemplo, la fórmula cerrada $\forall x\ (\exists y\ Rxy \wedge Pxa)$ tiene como subfórmula la fórmula abierta $\exists y\ Rxy \wedge Pxa$. Hemos dicho "normalmente" porque las reglas de formación permiten casos "degenerados" como $\forall x\ Pa$. Pero las sentencias que resul-

tarán de formalizar enunciados del lenguaje natural no serán de este tipo. En cualquier caso, debe quedar claro que las fórmulas abiertas son necesarias para construir sentencias generales, e.e. con cuantificadores, "no degeneradas" (como $\exists x\ Px$ o $\forall x\ Rxa$).

SUSTITUCIÓN DE VARIABLES POR TÉRMINOS

Para poder expresar de forma más precisa algunas ideas que veremos en semántica y en el cálculo, será conveniente disponer de la noción de *sustitución de una variable por un término en una fórmula*. Recuerde que son términos tanto las variables como las constantes individuales. La idea es muy sencilla: sustituir una variable **v** por un término **t** en una fórmula α no es más que reemplazar todas las ocurrencias libres de **v** en α por ocurrencias de **t**. Nótese que esta operación sólo afecta a las ocurrencias *libres* de las variables, pues las ocurrencias ligadas, como decía Russell, son sólo *variables aparentes*; en su ocurrencia ligada una variable en realidad *no varía*. La operación de sustitución no afectará por tanto a las sentencias, ya que éstas no tienen variables libres.

La *sustitución de* **v** *por* **t** *en* α (y escribimos 'α [**v**,**t**]') es la secuencia que resulta de reemplazar las ocurrencias libres de **v** en α por ocurrencias de **t**.

Así, por ejemplo,

$Rab\ [x,c] \equiv Rab$
$Rax\ [x,c] \equiv Rac$
$Ray\ [x,c] \equiv Ray$
$Rcx\ [x,c] \equiv Rcc$
$Rax\ [x,y] \equiv Ray$
$Ray\ [x,y] \equiv Ray$
$Raz\ [x,c] \equiv Raz$
$\forall x\ (Rxyz \rightarrow \exists y\ Pxyz)\ [x,c] \equiv \forall x\ (Rxyz \rightarrow \exists y\ Pxyz)$
$\forall x\ (Rxyz \rightarrow \exists y\ Pxyz)\ [y,c] \equiv \forall x\ (Rxcz \rightarrow \exists y\ Pxyz)$
$\forall x\ (Rxyz \rightarrow \exists y\ Pxyz)\ [z,c] \equiv \forall x\ (Rxyc \rightarrow \exists y\ Pxyc)$
$\forall x\ (Rxyz \rightarrow \exists y\ Pxyz)\ [y,z] \equiv \forall x\ (Rxzz \rightarrow \exists y\ Pxyz)$
$\forall x\ (Rxyz \rightarrow \exists y\ Pxyz)\ [z,y] \equiv \forall x\ (Rxyy \rightarrow \exists y\ Pxyy)$

EJERCICIOS: 1 a 20.

3. Formalización del lenguaje natural

Podemos ver ahora ya cómo aplicar el lenguaje formal de primer orden a la formalización de enunciados del lenguaje natural (recuérdese que las fórmulas resultantes siempre han de ser sentencias).

Como ocurría en L0, no hay en general reglas automáticas para la formalización, aunque en algunos casos pueden darse indicaciones bastante precisas. Lo único que podemos decir completamente general, que no es mucho, es que al formalizar en L1 debemos siempre:

(a) identificar los nombres y predicados más simples involucrados,
(b) asignar a cada nombre una constante individual y a cada predicado un relator,
(c) reconstruir la estructura del enunciado con esos signos y los signos lógicos (comprobando siempre que el resultado es una sentencia).

SIMPLICIDAD DE LOS RELATORES

La referencia a la simplicidad de los predicados es importante. La finalidad de este lenguaje formal es expresar la estructura lógica del lenguaje natural en toda su complejidad. Esto es, allí donde haya complejidad, la formalización habrá de ponerla de manifiesto. Ya vimos que con los nombres de momento no íbamos a poder hacerlo del todo, pues las descripciones van a contar provisionalmente como expresiones simples. Pero con los predicados procuraremos ser más estrictos, hasta donde sea posible. Por ejemplo, para el análisis del enunciado 'Sartre es filósofo francés', no tomaremos un único predicado, 'ser filósofo francés', sino dos: 'ser filósofo' y 'ser francés'. O para el de 'Sartre admira a Carnap' no tomaremos 'admira a Carnap' como un relator monario, sino 'admira a' como relator binario y 'Carnap' como constante individual para oficiar de uno de sus dos argumentos. Pero nótese que esto no siempre es posible. En 'Juan corre rápidamente' no tomaremos 'corre' y 'rápidamente' como relatores diferentes, sino que tomaremos 'corre rápidamente' como único relator (así ocurrirá en general con las construcciones adverbiales). La idea es que cuando se trate de cosas tales que todas ellas se puedan dar *independientemente* deberemos formalizarlas separadamente, pues aunque aparezcan juntas en una afirmación determinada, a lo largo de un argumento pueden darse por separado (aunque 'corre' se puede dar "solo", la inversa no es cierta, 'rápidamente' no puede darse "solo").

Los enunciados particulares, e.e. sin cuantificadores, son muy fáciles de formalizar.

EJEMPLO: Si Sartre es filósofo francés entonces no admira a Carnap.
$a \equiv$ Sartre
$b \equiv$ Carnap
$F \equiv$ ser filósofo
$R \equiv$ ser francés
$A \equiv$ admirar a
Formalización: $(Fa \wedge Ra) \rightarrow \neg Aab$

Los casos más simples de enunciados generales también son sencillos (aunque muy poco frecuentes).

EJEMPLO: Algo es divino.
$D \equiv$ ser divino
Formalización: $\exists x\, Dx$

EJEMPLO: Todo es peligroso.
$P \equiv$ ser peligroso
Formalización: $\forall x\ Px$

EJEMPLO: Juan admira a alguien.
$a \equiv$ Juan
$A \equiv$ admirar a
Formalización: $\exists x\ Aax$

Vamos a ver a continuación algunas indicaciones útiles para otros tipos de enunciados generales que, aunque todavía sencillos, son más interesantes.

ENUNCIADOS UNIVERSALES AFIRMATIVOS, UNIVERSALES NEGATIVOS, EXISTENCIALES AFIRMATIVOS Y EXISTENCIALES NEGATIVOS

Estos son los cuatro tipos de enunciados cuantificacionales de los que se ocupaba la silogística aristotélica, y muchos otros pueden construirse como combinaciones de ellos. Son enunciados del tipo:

Todos los tal son cual	(universal afirmativo)
Ningún tal es cual	(universal negativo)
Algún tal es cual	(particular afirmativo)
Algún tal no es cual	(particular negativo)

Su formalización, p.e. para el caso en que 'tal' es 'filósofo' y 'cual' es 'aburrido', es la siguiente:

$F \equiv$ ser filósofo
$A \equiv$ ser aburrido

'Todo filósofo es aburrido'
Formalización: $\forall x\ (Fx \rightarrow Ax)$
Comentario. La formalización se puede leer informalmente así: "de toda cosa es cierto que *si* tiene la propiedad de ser filósofo *entonces* también tiene la propiedad de ser aburrido". Nótese que no serviría el conyuntor $\wedge$ en lugar del condicional $\rightarrow$, pues en ese caso lo que estaríamos diciendo es que de todas las cosas es cierto que tienen ambas propiedades a la vez, lo cual es obviamente más fuerte que el enunciado original.

'Ningún filósofo es aburrido'
Formalización: $\forall x\ (Fx \rightarrow \neg Ax)$
Comentario. La idea ahora es que, si se es filósofo entonces *no* se es aburrido. La conectiva que corresponde es el condicional por los mismos motivos que antes. Esperaremos a los comentarios sobre formalizaciones alternativas equivalentes para ver otras posibles formalizaciones equivalentes de este enunciado que el lector puede haber pensado.

'Algún filósofo es aburrido'
Formalización: $\exists x\ (Fx \wedge Ax)$
Comentario. Ahora debemos usar, además del cuantificador existencial, el conyuntor, pues el enunciado expresa el contenido de que existe al menos un objeto que tiene esas dos propiedades a la vez (lo cual, como se comprenderá plenamente cuando estudiemos la semántica, no queda garantizado si utilizamos el condicional).

'Algún filósofo no es aburrido'
Formalización: $\exists x\ (Fx \wedge \neg Ax)$
Comentario. Lo que el enunciado expresa ahora es que hay al menos un objeto que tiene la primera propiedad y carece de la segunda.

Una vez vistas estas cuatro formas básicas, la formalización de otros enunciados más complejos es inmediata, sólo varía en que 'tal' y 'cual' son ahora complejos:

'Todo filósofo francés es aburrido o admira a Carnap'
$a \equiv$ Carnap
$F \equiv$ ser filósofo
$R \equiv$ ser francés
$A \equiv$ ser aburrido
$M \equiv$ admirar a
Formalización: $\forall x\ (\ (Fx \wedge Rx) \rightarrow (Ax \vee Mxa)\ )$

Los siguientes ejemplos son variantes cada vez más complejas.

'Juan simpatiza con repetidores'
$a \equiv$ Juan
$S \equiv$ simpatizar con
$R \equiv$ ser repetidor
Formalización: $\exists x\ (Rx \wedge Sax)$

'Juan no simpatiza con repetidores'
$a \equiv$ Juan
$S \equiv$ simpatizar con
$R \equiv$ ser repetidor
Formalización: $\forall x\ (Rx \rightarrow \neg Sax)$

'Juan simpatiza con todos los repetidores'
$a \equiv$ Juan
$S \equiv$ simpatizar con
$R \equiv$ ser repetidor
Formalización: $\forall x\ (Rx \rightarrow Sax)$

'Todo novato es embaucado por algún repetidor'
$N \equiv$ ser novato
$R \equiv$ ser repetidor
$E \equiv$ embaucar a
Formalización: $\forall x\ (Nx \rightarrow \exists y\ (Ry \wedge Eyx)\ )$

'Algunos discípulos de Platón admiran a Protágoras pero a ningún otro sofista'
$a \equiv$ Platón
$b \equiv$ Protágoras
$D \equiv$ ser discípulo de
$A \equiv$ admirar a
$S \equiv$ ser sofista
Formalización: $\exists x\ (Dxa \wedge Axb \wedge \forall y\ ((Sy \wedge \neg y{\approx}b) \rightarrow \neg Axy)\ )$

FORMALIZACIONES EQUIVALENTES

Aquí debemos hacer el mismo tipo de consideraciones sobre vaguedad y formalizaciones alternativas que ya hicimos en L0. En concreto sobre formalizaciones alternativas, quizás se haya pensado, para el caso del universal negativo 'Ningún filósofo es aburrido', en alguna otra formalización, probablemente

$\neg\exists x\ (Fx \wedge Ax)$.

Pues efectivamente, ésta también es una formalización correcta. *Pero* no se trata de formalizaciones en el fondo diferentes, pues ambas "dicen lo mismo"; son formalizaciones equivalentes en un sentido análogo al que vimos en L0 (y que aquí deberemos esperar hasta el próximo capítulo para verlo precisado). En realidad, éste no es el único caso, los tres restantes también tienen formalizaciones equivalentes:

$\forall x\ (Fx \rightarrow Ax)$	es eq. a	$\neg\exists x\ (Fx \wedge \neg Ax)$
$\forall x\ (Fx \rightarrow \neg Ax)$	es eq. a	$\neg\exists x\ (Fx \wedge Ax)$
$\exists x\ (Fx \wedge Ax)$	es eq. a	$\neg\forall x\ (Fx \rightarrow \neg Ax)$
$\exists x\ (Fx \wedge \neg Ax)$	es eq. a	$\neg\forall x\ (Fx \rightarrow Ax)$

Como puede verse, la sentencia existencial negativa es equivalente a la negación de la universal afirmativa, y la existencial afirmativa es equivalente a la negación de la universal negativa. Hay muchos otros casos de formalizaciones equivalentes, algunos de los cuales veremos más adelante.

AMBIGÜEDAD

El lenguaje natural, también en los aspectos que tienen que ver con el contenido de los enunciados simples, que es el que ahora nos ocupa, es muchas veces ambiguo. Los casos más comunes son los de equivocidad semántica, p.e. 'Juan llevaba un gato en el coche', que puede significar dos cosas diferentes según se interprete 'gato' como un animal o como una herramienta. Estos casos generan problemas de formalización cuando en un argumento aparece la misma palabra en diferentes premisas y no está claro si tienen el mismo significado en todas sus apariciones. Si tienen diferente significado, se deben elegir entonces relatores diferentes; de lo contrario cometeremos una *falacia de equivocidad* (cf. cap. 1 sec. 3).

Otra fuente frecuente de ambigüedad proviene del uso de pronombres. Por ejemplo, 'Juan fue a comer con María y con su madre' tiene dos interpretaciones dependiendo de si el pronombre 'su' se asocia a 'Juan' o a 'María'.

Además de éstas y otras fuentes de ambigüedad, a veces la ambigüedad está relacionada con nuestro uso de las partículas lógicas. Un caso común es el de los enunciados del tipo '(todos) los tal no son cual', que unas veces se interpretan como universales negativos ('ningún tal es cual') y otras como negaciones de universales afirmativos ('no es el caso que todos los tal son cual'). Por ejemplo, 'Los políticos no son honestos' se interpretará quizás en el primer sentido, fuerte, expresando que ningún político es honesto. Pero 'Los jueces no son infalibles' se interpretará quizás en el segundo sentido, el débil, expresando sólo que no todos los jueces son infalibles (aquí las intuiciones pueden variar, si las del lector no coinciden con éstas, piense él mismo otros casos que recojan la ambigüedad).

Un caso menos común, pero presente a veces, afecta no a la forma negativa del universal, sino al universal mismo cuando utiliza 'los' en lugar de 'todos los'. Aunque en general hemos presentado 'los...' y 'todos los...' como sinónimos, en ciertos contextos 'los tal son cual' (p.e. 'los suecos son altos'), no se interpreta como significando que todos los cual son cual, sino sólo que *la mayoría* de (pero no todos) los tal son cual.

Otro caso de uso ambiguo de partículas lógicas tiene que ver con problemas de *alcance* de los cuantificadores universal y existencial cuando se combinan. Por ejemplo, en el enunciado 'todo estudiante admira a un profesor' se combinan ambos cuantificadores. Pero hay dos interpretaciones posibles. Una es que todo estudiante admire a *un mismo* profesor; esto es: existe un profesor al que todo estudiante admira. Otra es que para cada estudiante haya un profesor admirado por él, pero no necesariamente el mismo para todos los estudiantes; esto es: para cada estudiante existe un profesor admirado por él. Como se ve en las paráfrasis que hemos hecho, la diferencia radica en el orden o alcance de los cuantificadores. En el primer caso, el orden de los cuantificadores en la formalización es "$\exists x \forall y$ ...", mientras que en el segundo es "$\forall y \exists x$ ...". En semántica haremos explícito algo que el lector quizás haya advertido, a saber, que la primera interpretación es mucho más fuerte que la segunda (es cierto que todos tenemos alguien que es nuestro padre, pero no es cierto que hay alguien que es el padre de todos).

El último caso que mencionaremos y que a veces causa problemas es la interpretación del existencial afirmativo 'algunos tal son cual', pues algunas veces tiende a interpretarse como expresando, no sólo que algunos tal son cual, sino *además* que algunos tal no son cual. Pero eso es un error de interpretación. El error se deriva de que el oyente tiende a suponer que en el contexto en cuestión se dispone de la información completa; si a ello añadimos el hecho pragmático consistente en que el oyente espera que el hablante proporcione la máxima información de que dispone, entonces el oyente tiende a concluir la información extra.[3] Pero debe que-

3. Pues, de acuerdo con esa expectativa, el oyente espera que si el hablante supiese que *todos* los tal son cual, entonces lo diría; así, si no lo dice es que no todos los tal son cual, esto es, algunos tal no son cual.

dar claro que no tiene por qué ser en general así; debe quedar claro que 'algunos tal son cual' es *compatible* con que todos lo sean.[4]

Como dijimos al comentar este mismo fenómeno en lógica proposicional, la ambigüedad es un hecho ubicuo en el lenguaje y simplemente debemos aceptarlo. Pero eso no afecta a la formalización, pues *si* está claro el contenido expresado por el enunciado, debe también estar clara entonces cuál es la formula (o fórmulas equivalentes) que lo formaliza.

CUANTIFICACIÓN NUMÉRICA

Las últimas indicaciones que vamos a dar tienen que ver con enunciados del lenguaje natural del tipo 'Hay al menos tres habitantes en el universo' o 'Hay cuatro puntos cardinales'. Estos enunciados hacen uso de la *predicación numérica*, usan números y parecen requerir por tanto recursos adicionales a los que hasta ahora disponemos. Sin embargo es fácil ver que no es así. Con los dos cuantificadores que tenemos, 'para todo' y 'para al menos un', podemos expresar cualquier enunciado que haga uso de cuantificación numérica del tipo 'hay al menos n ...', 'hay como máximo n ...' o 'hay exactamente n... '. La clave está en que el tercer caso es una combinación de los dos primeros, y los dos primeros los podemos expresar fácilmente con nuestros dos cuantificadores. Empezaremos con los casos más sencillos, aquellos que contienen 'uno' y 'dos', y se verá enseguida cómo generalizarlos.

'Hay al menos un tal':

$\exists x\ Tx$

'Hay como máximo un tal':

$\forall xy\ (\ (Tx \wedge Ty) \rightarrow x \approx y\ )$

esto es, caso de que haya "dos" cosas con esa propiedad, puesto que hay como máximo una, deben ser la misma (nótese que esto es compatible con que no haya ninguna).

'Hay exactamente un tal':

la clave es darse cuenta de que no es más que la conyunción de los dos enunciados anteriores: si hay al menos uno, y hay como máximo uno, entonces hay uno y sólo uno, esto es

$\exists x\ Tx \wedge \forall xy\ (\ (Tx \wedge Ty) \rightarrow x \approx y\ )$

que es equivalente a

$\exists x\ (Tx \wedge \forall y\ (Ty \rightarrow x \approx y\ )\ )$

y también a

$\exists x\ \forall y\ (Ty \leftrightarrow y \approx x)$

4. Imagínese que pasa por delante de la puerta de una habitación y ve entrar a dos personas rubias, en ese caso es obvio que si dice "algunas personas de esta habitación son rubias" no entenderemos que algunas otras no lo son.

'Hay al menos dos tal':

$\exists xy\ (Tx \wedge Ty \wedge \neg x{\approx}y)$

esto es, existen dos cosas *diferentes* que son tal.

'Hay como máximo dos tal':

$\forall xyz\ (\ (Tx \wedge Ty \wedge Tz) \rightarrow (x{\approx}y \vee x{\approx}z \vee y{\approx}z)\ )$

esto es, si hay "tres" cosas que son tal, alguna debe ser igual a alguna de las otras.

'Hay exactamente dos tal':

$\exists xy\ (Tx \wedge Ty \wedge \neg x{\approx}y) \wedge \forall xyz\ (\ (Tx \wedge Ty \wedge Tz) \rightarrow (x{\approx}y \vee x{\approx}z \vee y{\approx}z)\ )$

que es equivalente a

$\exists xy\ (Tx \wedge Ty \wedge \neg x{\approx}y \wedge \forall z\ (Tz \rightarrow z{\approx}x \vee z{\approx}y)\ )$

'Hay al menos tres tal':

$\exists xyz\ (Tx \wedge Ty \wedge Tz \wedge \neg x{\approx}y \wedge \neg x{\approx}z \wedge \neg y{\approx}z)$

Y así sucesivamente.

Concluiremos formalizando algunos enunciados que combinan algunas de estas estructuras.

EJEMPLO: Los congresistas rusos cederán, pero los congresistas americanos no, sólo si Kennedy no es criticado por ningún congresista americano.
Signos primitivos:
a ≡ Kennedy
C ≡ ser congresista
R ≡ ser ruso
A ≡ ser americano
D ≡ ceder
T ≡ criticar a
Formalización: $(\forall x\ (\ (Cx \wedge Rx) \rightarrow Dx) \wedge \forall x\ (\ (Cx \wedge Ax) \rightarrow \neg Dx)\ ) \rightarrow \neg\exists x\ (Cx \wedge Ax \wedge Txa)$

EJEMPLO: Ningún postmoderno admira a ningún analítico que se entusiasme leyendo a Carnap.
Signos primitivos:
a ≡ Carnap
P ≡ ser postmoderno
A ≡ ser analítico
M ≡ admirar a
E ≡ entusiasmarse leyendo a
Formalización: $\neg\exists xy\ (Px \wedge Ay \wedge Eya \wedge Mxy)$

EJEMPLO: Si Juan admira al menos tres personas, entonces también admira a los admirados por quienes él admira.
Signos primitivos:
a ≡ Juan
A ≡ admirar a
Formalización: $\exists xyz\ (Aax \wedge Aay \wedge Aaz \wedge \neg x{\approx}y \wedge \neg x{\approx}z \wedge \neg y{\approx}z) \rightarrow \forall xy\ (\ (Aax \wedge Axy\ ) \rightarrow Aay)$

EJEMPLO: Si Juan tiene exactamente dos amigos, entonces los que no son amigos de sus amigos tampoco son amigos suyos.
Signos primitivos:
$a \equiv$ Juan
$A \equiv$ ser amigo de
Formalización: $\exists xy\ (Axa \wedge Aya \wedge \neg x{\approx}y \wedge \forall z\ (Aaz \rightarrow (z{\approx}x \vee z{\approx}y)\ )\ ) \rightarrow \forall xy\ (\ (Axa \wedge \neg Ayx\ ) \rightarrow \neg Aya)$

EJERCICIOS: 21 a 65.

Ejercicios

Determinar cuáles de las siguientes filas de signos son fórmulas (suponiendo que los relatores tienen en cada caso la ariedad requerida).

1 $\forall x\ (x{=}a \rightarrow \exists y(Py \wedge Ray))$
2 $\exists \neg x\ Pxa \vee Rafx$
3 $\neg Rxb \leftrightarrow \exists z(z{\approx}a{\approx}b)$
4 $\forall x(\neg Rxb \leftrightarrow \exists z\ \neg z{\approx}y)$
5 $\exists x \neg \forall y\ y{\approx}Rabxy$
6 $a{=}x \vee \neg \forall x \neg (Rax \rightarrow \neg Pa)$
7 $\neg \forall x \exists y\ (x{\approx}y \rightarrow \neg \exists z(\ (Pxz \wedge \neg Pzx) \rightarrow Kxy))$
8 $\exists x \exists y \exists z \forall u \forall v\ (\ (Pxy \wedge Ryz \wedge \neg u{\approx}z \wedge x{\approx}v) \leftrightarrow Kxyz)$
9 $\exists x\ (Rx \wedge \neg Pax)$
10 $\forall x\ (Sxa \rightarrow Sbx)$
11 $\exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Ray \rightarrow x{\approx}y))$
12 $\forall x\ (x{\approx}a \rightarrow Rbx)$
13 $\forall x \exists y\ (\neg x{\approx}y \wedge Rxy)$
14 $\exists xyz\ (Rax \wedge Ray \wedge Rxz \wedge \neg Rzy)$
15 $\forall xyz\ (\ (Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
16 $\forall xy\ (\ (Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x{\approx}y)$
17 $\forall xy\ (\ (Dx \wedge Dy) \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$
18 $\forall xy\ (x{\approx}y \rightarrow y{\approx}x)$
19 $\forall x \exists y\ (Py \leftrightarrow x{\approx}y)$

20 De las secuencias de signos 1 a 19 que sean expresiones bien formadas, indicar cuáles son fórmulas abiertas y cuáles son sentencias.

Formalizar los siguientes enunciados, indicando las expresiones denotadas por los relatores y constantes individuales usadas.

21 Úrsula es alta, rubia y peligrosa.

22 A Pedro no le gusta la zarzaparrilla ni la miel.

23 Fernando es serio aunque indeciso.

24 El padre de Luis es el padre del padre de Juan.

25 El mejor matemático es despistado.

26 Rosa es alta o delgada, a pesar de comer mucho.

27 Alguien aprobará la estadística.

28 Todos los novatos son ingenuos.

29 Algunos intelectuales son frívolos.

30 Ningún repetidor es estudioso.

31 Algunos lógicos no son sensatos.

32 No todos los combustibles son contaminantes.

33 Bastantes chiflados son simpáticos.

34 La mayoría de los políticos son dogmáticos.

35 Algún europeo bajito disfruta con Mozart pero no con Wagner.

36 Cualquier estudiante espabilado acaba la carrera en doce años.

37 Ningún napolitano que juega a tenis baila el Fox-Trot.

38 Hay comidas que no son saludables aunque sí exquisitas.

39 Muchos ingleses que toman té fuman desesperadamente pero comen con moderación.

40 A algunos alumnos que no son serios les gusta el griego pero no las matemáticas.

41 Cualquiera que sea aficionado al griego es brillante o pesado.

42 Segismunda no pasea con novatos aunque sí con repetidores.

43 Tanto los novatos como los repetidores odian las matemáticas.

44 Eustaquio sólo pasea con Fulgencia.

45 A los repetidores que pasean con Rosa les gustan las matemáticas pero no el griego ni el latín.

46 Los únicos novatos que pasean con Fulgencia son los extrovertidos.

47 Cipriano sólo pasea con repetidoras.

48 Todo novato pasea con alguna repetidora.

49 Sólo hay un alumno que pasea con Rosa.

50 Hay al menos dos repetidores.

51 Como máximo hay tres novatos.

52 Hay exactamente dos repetidores novatos.

53 Los puntos cardinales son cuatro.

54 Hay como máximo una persona que es amiga del padre del tío del amigo del asesino de su madre.

55 Si a todos los novatos les gusta el griego entonces a algunos repetidores también.

56 Si todos los quesos son blancos y nada blanco es dulce entonces ningún queso es dulce.

57 Si a algún positivista no le gusta Heidegger y a todo al que no le gusta Heidegger adora a Carnap, entonces ningún positivista es existencialista.

58 Bastantes intelectuales son repelentes. No todos los repelentes son arrogantes. Los arrogantes no son inteligentes. Todo lo anterior ocurre si y sólo si hay intelectuales no inteligentes o ningún arrogante es intelectual.

59 Si el que una persona es padre de otra implica que la segunda no lo es de la primera, entonces nadie es su propio padre.

60 Si Path es un dios egipcio y es padre de todos los dioses egipcios, entonces es su propio padre.

61 Si Carlos afeita a todos los habitantes de Sitges que no se afeitan a sí mismos y sólo a ellos, y Carlos mismo es habitante de Sitges, entonces Carlos no afeita a nadie.

62 Si quien desprecia a los fanáticos desprecia también a los políticos, y alguien no desprecia a algún político, entonces hay un fanático al que no todos desprecian.

63 Ningún existencialista aprecia a ningún positivista. Todos los miembros del Círculo de Viena son positivistas. Entonces, ningún existencialista aprecia a ningún miembro del Círculo de Viena.

64 Los primos de Pedro son hermanos de Rosa. Algunos hermanos se envidian. María, que es cándida, es hermana de un primo de Pedro. Todo lo anterior ocurre si no es cierto que alguna hermana de Rosa no la envidia.

65 Los discípulos de Platón admiran a Sócrates. Muchos filósofos se ignoran mutuamente. Aristóteles, que es ateniense, es discípulo de un discípulo de Sócrates. Cuando uno ignora a otro, éste también ignora a aquél. Todo lo anterior ocurre si y sólo si algún ateniense no ignora a Sócrates.

CAPÍTULO 7

SEMÁNTICA FORMAL. CONSECUENCIA LÓGICA[1]

Vamos a ver ahora, como hicimos en L0, el análisis semántico de la noción de *seguirse de*, esto es, el concepto de *consecuencia lógica* y los conceptos asociados de *verdad lógica* y *equivalencia lógica*. En realidad, no hay nada en estas ideas esencialmente nuevo respecto de lo que vimos entonces. Toda la novedad se debe exclusivamente al modo que vamos a tener ahora de asignar valores veritativos a los enunciados simples. En L0 tales enunciados quedaban sin analizar, por lo que su valor veritativo se consideraba dado y tan sólo había que encontrar el valor de las moleculares una vez dado el de las atómicas. Ahora tales enunciados simples se analizan en su estructura interna, por lo que su valor veritativo ya no será primitivo. El valor veritativo de un enunciado simple será ahora algo que se obtendrá a partir de *la interpretación de sus partes constituyentes*. Así, lo que ahora va a considerarse dado o primitivo es la interpretación de los constituyentes de los enunciados simples. Esta interpretación asignará a cada constituyente no lógico (constantes individuales y relatores) ciertas entidades, y el valor veritativo del enunciado simple, su ser verdadero o su ser falso, dependerá de que ciertas condiciones se den o no se den entre esas entidades, condiciones que variarán con la estructura lógica del enunciado. Así, por ejemplo, la sentencia

$\forall x\, Rxa$

será verdadera o falsa dependiendo de sobre qué objetos varíen las variables y de cómo interpretemos el relator y la constante individual, esto es, dependiendo de por qué entidades suponemos que están:

— Si las variables varían sobre números naturales, R está por la relación "mayor o igual que" y a por el 0, entonces es verdadera; pues así interpretada dice que todo número natural es mayor o igual que 0, y esto es verdadero.

— Si las variables varían sobre números naturales, R está por la relación "mayor que" y a por el 0, entonces es falsa; pues así interpretada

1. Recuérdese que en esta sección vamos a hacer uso de algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos, principalmente la de relación y las presupuestas por ella (cf. cap. 11 y cap. 12 secs. 1 y 2).

dice que todo número natural es mayor que 0, y esto es falso (el 0 es natural y no es mayor que sí mismo).

— Si las variables varían sobre números enteros, *R* está por la relación "mayor o igual que" y *a* por el 0, entonces es falsa; pues así interpretada dice que todo número entero es mayor o igual que 0, y esto es falso (los enteros negativos no son mayores o iguales a 0).

— Si las variables varían sobre números naturales, *R* está por la relación "mayor o igual que" y *a* por el 2, entonces es falsa; pues así interpretada dice que todo número natural es mayor o igual a 2, y esto es falso.

— Si las variables varían sobre humanos, *R* está por la relación "ser hijo de" y *a* por Isabel la Católica, entonces es falsa; pues así interpretada dice que todo humano es hijo de Isabel la Católica, y esto es falso.

— Si las variables varían sobre objetos naturales, *R* está por la relación "haber empezado a existir después o al mismo tiempo que" y *a* por el Big Bang, entonces es verdadera; pues así interpretada dice que todo objeto natural ha empezado a existir después o al mismo tiempo que el Big Bang, y esto es verdadero (al menos según nuestras actuales teorías cosmológicas, esto es, si nuestras actuales teorías cosmológicas son verdaderas en ese aspecto).

— Si las variables varían sobre objetos del conjunto {*,#, $}, *R* está por la relación {<*,#>, <#, #>, <$,#>, <#,*>} y *a* por #, entonces es verdadera; pues así interpretada dice que todos los objetos de {*,#, $} tienen a su derecha a # en un par de *R*, y esto es verdadero.

— Si las variables varían sobre objetos del conjunto {*, #, $}, *R* está por la relación {<*, #>,<#, #>,<$,#>, <#,*>} y *a* por *, entonces es falsa; pues así interpretada dice que todos los objetos de {*,#, $} tienen a su derecha a * en un par de *R*, y esto es falso (sólo # tiene * a su derecha, ni $ ni * tienen * a su derecha en *R*).

Este depender el valor veritativo de los enunciados simples de la interpretación de sus signos constituyentes, y de cómo estos signos se estructuran para formar el enunciado simple, será todo lo novedoso de la semántica de L1 (que como veremos no es poco). El resto es exactamente igual que en lógica proposicional. Pasemos ya a ver el aparato que nos permitirá hacer precisas estas ideas.

1. Interpretación I y estructura asociada S_I

Para tener bien definida una interpretación de cualquier fórmula será necesario hacer dos cosas:

(a) Dar la interpretación de los signos no lógicos (constantes individuales y relatores) de la fórmula, así como el dominio de objetos sobre los que se considera que varían las variables.

(b) Especificar cómo depende la interpretación de una fórmula de la interpretación de sus partes constituyentes: si es molecular, cómo de-

pende de la interpretación de sus atómicas constituyentes y de su estructura lógica; si es atómica, cómo depende de la interpretación de los signos no lógicos que contiene y de su estructura lógica.

Lo primero se ha de hacer en cada caso, esto es, para cada fórmula deberemos especificar la interpretación de sus signos no lógicos. Lo segundo puede hacerse "de una vez por todas", esto es, especificando en general qué valor veritativo corresponde a una fórmula en función de las interpretaciones de sus componentes. Cuando hagamos eso para cada *tipo* de fórmula que puede tener el lenguaje (conyunciones, implicaciones, igualdades, generales universales, generales existenciales, ...), tendremos ya determinada la interpretación de la fórmula, su valor veritativo, tan pronto como dispongamos de la interpretación de sus signos no lógicos y el ámbito sobre el que varían las variables. Hacer lo que requerido en (b) es dar una *definición de verdad o satisfacción* para sentencias. Empezaremos por lo primero.

UNIVERSO DE DISCURSO E INTERPRETACIÓN DE SIGNOS NO LÓGICOS

Como muestran los casos primero y tercero de la lista de interpretaciones informales que hemos dado, el ámbito de variabilidad de las variables puede afectar drásticamente al valor veritativo. En esos ejemplos, si las variables variaban sobre números naturales la fórmula resultaba verdadera, pero si variaban sobre números enteros entonces resultaba falsa, aunque los signos no lógicos "se interpretaran igual" (no literalmente igual, pues al variar el universo varía también la extensión de las relaciones). Por tanto, para dar una interpretación es esencial especificar el ámbito o dominio de variabilidad de las variables. Es decir, hay que dar un conjunto de objetos que serán a los que se supone que "refieren" las variables. A este dominio o conjunto de objetos se le llama *universo de discurso* **U** (así, en los casos comentados, el universo del primero es el conjunto N de números naturales, y el del tercero es el conjunto Z de los números enteros).

Una vez tenemos determinado el universo de discurso, podemos interpretar los relatores y las constantes de la fórmula. La idea es sencilla: los relatores se interpretarán como relaciones entre los individuos del universo de discurso y las constantes como objetos destacados de ese universo. En el caso de los relatores hay que preservar la ariedad: a los relatores monarios se les asignará subconjuntos de **U**; a los relatores binarios se asignará relaciones binarias, e.e. subconjuntos de **U**x**U**; a los relatores ternarios, subconjuntos de **U**x**U**x**U**; y así sucesivamente. Veámoslo:

Sea L un lenguaje de primer orden que tiene como signos no lógicos k relatores $\mathbf{R}_1$, ..., $\mathbf{R}_k$, y l constantes individuales $\mathbf{c}_1$, ..., $\mathbf{c}_l$. Dar una interpretación **I** para L consiste en:

(i) Fijar un universo de discurso $\mathbb{U}$, distinto del conjunto vacío $\varnothing$.
(ii) Para cada relator $\mathbb{R}_i$ ($i \leq k$), asignar a $\mathbb{R}_i$ una relación sobre $\mathbb{U}$ que preserve su ariedad: si $\mathbb{R}_i$ es un relator n-ario, $\mathbb{I}(\mathbb{R}_i) \subseteq \mathbb{U}^n$.[2]
(ii) Para cada $\mathbb{c}_i$ ($i \leq l$), asignar a $\mathbb{c}_i$ un objeto de $\mathbb{U}$: $\mathbb{I}(\mathbb{c}_i) \in \mathbb{U}$

Cada interpretación se puede expresar en una estructura $S_{\mathbb{I}}$, a la que llamaremos, *estructura asociada a la interpretación* $\mathbb{I}$, que consiste en su universo y en la serie de interpretaciones de relatores y constantes de lenguaje en el orden en que se hayan numerado:

$S_{\mathbb{I}} = \langle \mathbb{U}, \mathbb{I}(\mathbb{R}_1), \ldots, \mathbb{I}(\mathbb{R}_k), \mathbb{I}(\mathbb{c}_1), \ldots, \mathbb{I}(\mathbb{c}_l) \rangle$

EJEMPLO: Dar tres interpretaciones, y sus estructuras asociadas, para la fórmula $\forall x\ (Px \rightarrow Rxa)$.

$\mathbb{I}_1$:
$\mathbb{U}$= {x / x es humano} = H (el conjunto de los humanos)
$\mathbb{I}(P)$= {x / x es mujer} (el conjunto de las mujeres)
$\mathbb{I}(R)$= { $\langle x,y \rangle \in$ HxH / x es descendiente de y} (la relación de descendencia entre humanos)
$\mathbb{I}(a)$= Adán

$\mathbb{I}_2$:
$\mathbb{U}$= {x / x es número natural} = N (el conjunto de los números naturales)
$\mathbb{I}(P)$= {x / x es par} (el conjunto de los números pares)
$\mathbb{I}(R)$= {$\langle x,y \rangle \in$ NxN / x es divisible por y} (la relación de divisibilidad entre naturales)
$\mathbb{I}(a)$= 2

$\mathbb{I}_3$:
$\mathbb{U}$= {1,2,3,4}
$\mathbb{I}(P)$= {1,4}
$\mathbb{I}(R)$= {<1,3>, <2,3>, <3,3>, <4,1>}
$\mathbb{I}(a)$= 3

Las correspondientes estructuras asociadas son:

$S_{\mathbb{I}1}$ = < {x / x es humano}, {x / x es mujer}, {<x,y> / x es descendiente de y}, Adán >
$S_{\mathbb{I}2}$ = < {x / x es número natural}, {x / x es par}, { <x,y> / x es divisible por y}, 2 >
$S_{\mathbb{I}3}$ = < {1,2,3,4}, {1,4}, {<1,3>, <2,3>, <3,3>, <4,1>}, 3 >

Como se habrá observado, en las interpretaciones podemos elegir como universo el conjunto que queramos (de números, de letras, de personas, ...) mientras después realicemos correctamente la interpretación de relatores y constantes sobre ese universo. A partir de ahora vamos a tomar

2. Nótese que esta condición permite asignar a los relatores el conjunto vacío $\varnothing$, pues es subconjunto de cualquier conjunto. Esto es, aunque el universo de la interpretación no puede ser vacío, la interpretación de los relatores sí puede serlo.

por comodidad casi siempre como universo conjuntos dados extensionalmente (preferentemente de números), como en la tercera de las anteriores interpretaciones, y no conjuntos dados por comprensión, como en las dos primeras. Nada esencial depende de ello (salvo si una fórmula sólo se puede satisfacer por interpretaciones de universo infinito, en cuyo caso no podríamos dar el conjunto por extensión).

Podemos ver ahora ya la definición semántica de los signos lógicos, que como se verá no es sino dxar la definición de verdad para sentencias (piénsese intuitivamente, antes de continuar, cuál es el valor veritativo de la fórmula del último ejemplo para cada una de estas tres interpretaciones).

Definición de verdad para sentencias

Lo que tenemos que hacer aquí es lo siguiente: suponiendo que disponemos ya de la interpretación del lenguaje, esto es, del universo de discurso y de la interpretación de relatores y constantes, especificar cómo depende la interpretación de una sentencia, su valor veritativo, de la interpretación de sus partes: si es molecular, de sus partes enunciativas atómicas; si es atómica, de sus partes subenunciativas.

Recuérdese que, según las reglas de formación, toda fórmula es: o una igualdad, o un relator seguido de términos, o una generalización universal, o una generalización existencial, o una fórmula compuesta por conectivas y otras fórmulas. La definición de verdad para sentencias debe tener en cuenta cada una de estas posibilidades. La idea para cada uno de los casos es sencilla: si se trata de una igualdad, será verdadera cuando las constantes que la flanquean tengan la misma interpretación; si es un relator seguido de constantes, será verdadera cuando la tupla formada por la interpretación de las constantes pertenezca a la interpretación del relator; si es una generalización universal, será verdadera cuando "la fórmula que le sigue sea verdadera de todos los individuos del universo"; si es una generalización existencial, será verdadera cuando "la fórmula que le sigue sea verdadera de al menos uno los individuos del universo" (estas dos últimas caracterizaciones son formalmente deficientes, pero se corregirán enseguida); en caso de que esté compuesta de conectivas y otras fórmulas, será verdadera cuando la definición semántica de los conectores, que ya vimos en L0, lo establezca.

En adelante, vamos a usar indistintamente las siguientes expresiones:

'$\mathbb{I}$ satisface α', '$\mathbb{I}$ hace verdadera a α', 'α es verdadera bajo la interpretación $\mathbb{I}$', 'α es verdadera en la estructura $S_{\mathbb{I}}$' y '$\mathbb{I}(\alpha)=1$';

y correspondientemente

'$\mathbb{I}$ no satisface α', '$\mathbb{I}$ hace falsa a α', 'α es falsa bajo la interpretación $\mathbb{I}$', 'α es falsa en la estructura $S_{\mathbb{I}}$' y '$\mathbb{I}(\alpha)=0$',

Veamos ya la definición precisa de $\mathbb{I}(\alpha)$ para cada uno de los casos indicados.

(i) *Igualdades*: $\alpha \equiv \mathbf{c}_1 \approx \mathbf{c}_2$
$\mathbf{I}(\mathbf{c}_1 \approx \mathbf{c}_2) = 1$ syss $\mathbf{I}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{I}(\mathbf{c}_2)$

EJEMPLO:
$a \approx b$ es verdadera bajo la interpretación
$\mathbf{I}_1$: **U**= el conjunto de los humanos, **I**(*a*)= Platón, **I**(*b*)= Platón
y es falsa bajo la interpretación
$\mathbf{I}_2$: **U**= el conjunto de los humanos, **I**(*a*)= Platón, **I**(*b*)= Sócrates

(ii) *Predicaciones*: $\alpha \equiv \mathbf{R}^n\ \mathbf{c}_1, \ldots\ \mathbf{c}_n$
$\mathbf{I}(\mathbf{R}^n\ \mathbf{c}_1, \ldots\ \mathbf{c}_n) = 1$ syss $<\mathbf{I}(\mathbf{c}_1), \ldots, \mathbf{I}(\mathbf{c}_n)> \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^n)$

EJEMPLO:
Rab es verdadera bajo la interpretación
$\mathbf{I}_1$: **U**= el conjunto H de los humanos, **I**(*a*)= Sócrates, **I**(*b*)= Platón, **I**(*R*)= la relación de nacer antes que entre humanos; pues
<Sócrates, Platón> $\in$ { $<x,y> \in$ HxH / x nace antes que y}, e.e. <**I**(*a*), **I**(*b*)>$\in$**I**(*R*).
Rab es falsa bajo la interpretación
$\mathbf{I}_2$: **U**= el conjunto de los humanos, **I**(*a*)= Kant, **I**(*b*)= Platón, **I**(*R*)= la relación de nacer antes entre humanos; pues
<Kant, Platón> $\notin$ { $<x,y> \in$ HxH / x nace antes que y}, <**I**(*a*), **I**(*b*)>$\notin$**I**(*R*).

(iii) *Cuantificaciones universales*: $\alpha \equiv \forall \mathbf{v}\ \beta$
$\mathbf{I}(\forall \mathbf{v}\ \beta) = 1$ syss "**I** hace verdadera a β para todo objeto de **U**"

(Enseguida veremos cómo expresar esta cláusula de modo más preciso.)

EJEMPLO:
$\forall x\ Rax$ es verdadera bajo la interpretación
$\mathbf{I}_1$: **U**= {1,2,3}, **I**(*R*)= { <1,1>, <3,3>, <3,2>, <3,1>}, **I**(*a*)= 3.
La fórmula dice intuitivamente que todo individuo del universo tiene a *a* a su izquierda en *R*. Esta interpretación la hace verdadera porque en la relación asignada al relator *R* ocurre que todo individuo de **U** tiene a su izquierda en un par al objeto asignado a la constante *a*, el 3.
$\forall x\ Rax$ es falsa bajo la interpretación
$\mathbf{I}_2$: **U**= {1,2,3}, **I**(*R*)= { <1,1>, <1,3>, <3,2>, <3,1>}, **I**(*a*)= 1
Intuitivamente: no todo individuo tiene el 1 a su izquierda en la interpretación de *R*, el 2 no lo tiene; falta el par <**I**(*a*),2> en **I**(*R*).

La cláusula que hemos utilizado en este caso es conveniente para introducir la idea intuitiva, pero es insatisfactoria por su poca precisión formal. La idea para precisarla es la siguiente.[3] Consideraremos sólo los casos normales en los que $\forall \mathbf{v}\ \beta$ es tal que **v** tiene ocurrencias libres en β, p.e. $\forall x$ *Rax* (en los otros casos, p.e. $\forall x\ Rab$, no se plantea problema pues la cuanti-

3. Lo que sigue es una aclaración y corrección de la cláusula. Si se encuentra de difícil comprensión, el lector debe asegurarse de que no le impide aplicar la versión intuitiva anterior, pues para nuestros actuales fines lo fundamental es que sepa determinar en ejemplos concretos si una interpretación hace verdadera o falsa a una sentencia general universal (o existencial, en la próxima cláusula).

ficación es sólo "aparente" y se aplica alguna de las otras cláusulas). Mediante '$\beta(\mathbf{v})$' connotaremos que β contiene ocurrencias libres de **v**. Supongamos que ampliamos nuestro lenguaje con una nueva constante $\mathbf{c}^*$ que no aparece en α (ni por tanto en β) (p.e. *b* en el ejemplo $\forall x\, Rax$). Ahora sustituimos las ocurrencias libres de **v** en β por $\mathbf{c}^*$. En términos de la operación de sustitución que vimos en el cap. 6 (sec. 3): obtenemos $\beta[\mathbf{v}, \mathbf{c}^*]$ (en nuestro ejemplo, $Rax[x,b] \equiv Rab$). Esta nueva fórmula será una sentencia (siempre que $\forall\mathbf{v}\beta$ lo sea también), y contendrá los relatores y constantes individuales de α más la constante nueva $\mathbf{c}^*$ (en nuestro ejemplo, *b*). Ahora extendemos la interpretación **I** inicial con una asignación para la nueva constante $\mathbf{c}^*$. Mediante '$\mathbf{I}^*$' nos referiremos a esta extensión. Pues bien, hay muchas extensiones $\mathbf{I}^*$ posibles diferentes de **I**. En realidad hay tantas como objetos de **U**, pues cada extensión consistirá en asignar a $\mathbf{c}^*$ uno de los objetos de **U**. Ahora podemos expresar la cláusula para el cuantificador universal de manera correcta, pues la sentencia $\forall\mathbf{v}\ \beta$ será verdadera bajo una interpretación **I** cuando *todas* sus extensiones $\mathbf{I}^*$ hagan verdadera la sentencia $\beta[\mathbf{v}, \mathbf{c}^*]$. (En nuestro ejemplo, **I** hace verdadera a $\forall x\, Rax$ cuando todas y cada una las extensiones posibles de **I** que surgen de asignar a *b* un objeto del universo, hacen verdadera a *Rab*). La cláusula correctamente formulada es pues la siguiente:

$\mathbf{I}(\forall\mathbf{v}\beta)=1$ syss, siendo $\mathbf{c}^*$ una constante que no aparece en β, toda $\mathbf{I}^*$ que extiende a **I** con una asignación para $\mathbf{c}^*$ es tal que $\mathbf{I}^*(\beta[\mathbf{v}, \mathbf{c}^*]) = 1$.

(iv) *Cuantificaciones existenciales*: $\alpha \equiv \exists\mathbf{v}\ \beta$

$\mathbf{I}(\exists\mathbf{v}\ \beta) = 1$ syss "**I** hace verdadera a β para algún objeto de **U**".

EJEMPLO:

$\exists x\, Rax$ es verdadera bajo la interpretación

$\mathbf{I}_1$: **U**= {1,2,3}, **I**(*R*)= { <1,1>, <3,3>, <2,2>, <3,1>}, **I**(*a*)= 3.

La fórmula dice intuitivamente que algún individuo del universo tiene a *a* a su izquierda en *R*. Esta interpretación la hace verdadera porque en la relación asignada al relator *R* ocurre que algún individuo de **U** (p.e. el 1, pero también el 3) tiene a su izquierda en un par al objeto asignado a la constante *a*, el 3.

$\exists x\, Rax$ es falsa bajo la interpretación

$\mathbf{I}_2$: **U**= {1,2,3}, **I**(*R*)= { <3,1>, <2,3>, <3,2>, <3,1>}, **I**(*a*)= 1

Intuitivamente: no es cierto que algún objeto de **U** tenga al 1 a su izquierda en la interpretación de *R*, ninguno lo tiene, no hay ningún par <1,...> en **I**(*R*).

Por los mismos motivos expuestos en los comentarios aclaratorios que hicimos a la cláusula anterior, la forma correcta de expresar esta cláusula es la siguiente:

$\mathbf{I}(\exists\mathbf{v}\beta)=1$ syss, siendo $\mathbf{c}^*$ una constante que no aparece en β, alguna $\mathbf{I}^*$ que extiende a **I** con una asignación para $\mathbf{c}^*$ es tal que $\mathbf{I}^*(\beta[\mathbf{v}, \mathbf{c}^*]) = 1$.

Las restantes cláusulas corresponden a sentencias cuyo signo principal es una conectiva, que ya vimos en L0 y que presentamos ahora sin comentarios adicionales.

(v) *Negaciones*: $\alpha \equiv \neg\beta$
$\mathbb{I}(\neg\beta)=1$ syss $\mathbb{I}(\beta)=0$

(vi) *Conyunciones*: $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$
$\mathbb{I}(\beta\wedge\gamma)=1$ syss $\mathbb{I}(\beta)=1$ y $\mathbb{I}(\gamma)=1$

(vii) *Disyunciones*: $\alpha \equiv \beta \vee \gamma$
$\mathbb{I}(\beta\vee\gamma)=0$ syss $\mathbb{I}(\beta)=0$ y $\mathbb{I}(\gamma)=0$

(viii) *Condicionales*: $\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$
$\mathbb{I}(\beta\rightarrow\gamma)=0$ syss $\mathbb{I}(\beta)=1$ y $\mathbb{I}(\gamma)=0$

(ix) *Bicondicionales*: $\alpha \equiv \beta \leftrightarrow \gamma$
$\mathbb{I}(\beta\leftrightarrow\gamma)=1$ syss $\mathbb{I}(\beta)=\mathbb{I}(\gamma)$

Para acabar de fijar estas ideas haremos dos tipos de ejercicios: dada una sentencia, buscar dos interpretaciones, una que la haga verdadera y otra que la haga falsa (en este último caso a veces se dice que damos un *contraejemplo* de lo que la sentencia afirma); dada una interpretación, buscar dos fórmulas que contengan los signos interpretados, una verdadera según la interpretación y la otra falsa.

EJEMPLO: $\forall x\ ((Px \wedge \neg x{\approx}a) \rightarrow \exists y\ Ryx)$
Lectura intuitiva: los que tienen la propiedad P que no sean a tienen a alguien a su izquierda en R.
Interpretación que la hace verdadera:
$\mathbb{I}_1$: $\mathbb{U}= \{1,2,3,4, 5\}$, $\mathbb{I}(P)= \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{I}(R)= \{ \langle 1,5\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,1\rangle\}$, $\mathbb{I}(a)= 3$
Los que están en $\mathbb{I}(P)$ que no son 3 son el 1 y el 5, y ellos sí tienen alguien a su izquierda en $\mathbb{I}(R)$. Nótese que aunque 3 estuviera a la izquierda de alguien, la fórmula seguiría siendo verdadera.
Interpretación que la hace falsa:
$\mathbb{I}_1$: $\mathbb{U}= \{1,2,3,4, 5\}$, $\mathbb{I}(P)= \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{I}(R)= \{\langle 2,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$, $\mathbb{I}(a)= 3$
Ahora el 1 sí tiene a alguien a su izquierda, pero el 5 no.

EJEMPLO: Interpretación $\mathbb{I}$: $\mathbb{U}$= el conjunto de los humanos, $\mathbb{I}(P)$= el conjunto de los varones, $\mathbb{I}(R)$= la relación de ser madre de entre humanos, $\mathbb{I}(a)$= la reina Sofía de España.
Fórmula verdadera bajo esta interpretación: $\exists xy\ (\neg Px \wedge \neg Py \wedge \neg x{\approx}y \wedge Rax \wedge Ray)$
Fórmula falsa bajo esta interpretación: $\exists xy\ (Px \wedge Py \wedge \neg x{\approx}y \wedge Rax \wedge Ray)$

Con la noción de *interpretación* de que ahora disponemos para fórmulas del lenguaje de primer orden, podemos hacer precisas en las dos próximas secciones las nociones semánticas fundamentales de *satisfacibilidad* y *consecuencia lógica*, junto con sus otras nociones asociadas. Debe notarse que las ideas que inspiran estas nociones son esencialmente las mismas que las que vimos en lógica proposicional. En realidad, en el sentido interesante, son exactamente las mismas nociones. Lo único que ha cambiado es que en L0 la interpretación de las fórmulas simples, su valor veritativo, venía dada, mientras que en L1, por el contrario, no viene dada

sino que se determina a partir de la interpretación de los signos que conforman las atómicas. Esto supone una mayor complejidad que tendrá, como veremos, algunas consecuencias importantes, pero las ideas semánticas son esencialmente las mismas. Puesto que las ideas intuitivas ya fueron presentadas detenidamente entonces, ahora presentaremos las definiciones sin apenas comentario, salvo en los casos en que tengan consecuencias relevantes respecto de las que vimos en L0.

2. Satisfacibilidad

La primera noción que vamos a presentar es la de *satisfacibilidad/insatisfacibilidad*, tanto para sentencias solas como para conjuntos de sentencias.

Satisfacibilidad para sentencias

Como se recordará, la idea es simplemente que una fórmula es satisfacible si *puede* ser verdadera, esto es, si existe al menos una interpretación que la hace verdadera. Y es insatisfacible en caso contrario. Las definiciones, como cabe esperar, están restringidas a sentencias.

— Una sentencia α es *satisfacible* syss hay una interpretación que la hace verdadera, e.e. si hay $\mathbf{I}$ tal que $\mathbf{I}(\alpha)=1$.
— Una sentencia α es *insatisfacible* syss no es satisfacible, e.e. si no hay ninguna interpretación que la hace verdadera, e.e. si para toda $\mathbf{I}$ ocurre que $\mathbf{I}(\alpha)=0$.
— Una sentencia α es *contingente* syss tanto ella como su negación son satisfacibles, e.e. si hay al menos una interpretación que hace a α verdadera y al menos otra que la hace falsa.

Así, p.e., la fórmula $\forall x\ ((Px \land \neg x{\approx}a) \rightarrow \exists y\ Ryx)$ es contingente, pues como vimos en el penúltimo ejemplo, hay una interpretación que la hace verdadera y otra que la hace falsa.

La primera diferencia que debemos comentar respecto de la lógica proposicional es que ahora no podemos *determinar* o *decidir* en todos los casos si una fórmula es satisfacible o insatisfacible. Si damos con una interpretación que la hace verdadera, sabremos que es satisfacible. Pero, *si no damos* con una interpretación que la haga falsa, ello no quiere decir necesariamente que sea insatisfacible. Para *demostrar* que es insatisfacible tenemos que demostrar que *todas las interpretaciones posibles* la hacen falsa. Pero, a diferencia de lo que ocurría en L0, donde había siempre un número finito de interpretaciones para cada fórmula, ahora hay *infinitas* interpretaciones posibles para cada una de ellas. En efecto, hay tantas interpretaciones posibles como universos de discurso permitidos (y entidades conjuntistas podamos construir sobre ellos). Y, aunque ocurriese que

los conjuntos de objetos físicos fuesen siempre finitos, si aceptamos como universos de discurso conjuntos matemáticos, incluso muy simples como el de los números naturales, ello es suficiente para que haya infinitas interpretaciones posibles. Así pues, "inspeccionando" las interpretaciones no es en general posible determinar si una fórmula es o no satisfacible, por la sencilla razón de que no podemos "inspeccionar" todas (contrariamente a lo que ocurría en L0). Por tanto, como dijimos, cuando encontramos una interpretación que la hace verdadera, podemos asegurar que lo es, pero por el mero hecho de que no hemos hallado una interpretación tal no podemos asegurar que la fórmula es insatisfacible. Ahora bien, eso no quiere decir que en ningún caso se pueda demostrar que una fórmula es insatisfacible. No se puede hacer "recorriendo" todas sus interpretaciones, pues hay infinitas. Pero a veces sí se puede hacer por vía indirecta: supondremos que la sentencia es satisfacible, e.e. que hay una interpretación que la hace verdadera; si de ese supuesto se sigue que una tal interpretación debería asignar entidades diferentes a un mismo signo, entonces podemos concluir que es insatisfacible. Como hemos indicado, y veremos con más detalle en la sección 4, esto sólo es posible en algunos casos.

EJEMPLO: Comprobar que la sentencia $\forall xy\ (Px \wedge Qy \wedge \neg x{\approx}y \rightarrow Rxy)$ es satisfacible.
La sentencia dice que todo objeto que tenga la propiedad *P* está a la izquierda en *R* de los objetos que tienen *Q* y que son diferentes a él. Vamos a construir una interpretación en la que esto ocurra:
$\mathbf{I}_1$: **U** = {1,2,3,4,5}, **I**(*P*) = {1,3}, **I**(*Q*) = {3,4,}, **I**(*R*) = {<1,4>, <3,4>, <3,5>,<1,3>,<2,5>}.
Nótese que si **I**(*P*) y **I**(*Q*) fuesen iguales y tuviesen sólo un elemento, entonces **I**(*R*) podría ser cualquier cosa, pues el antecedente sería siempre falso, por ejemplo:
$\mathbf{I}_2$: **U** = {1,2,3,4,5}, **I**(*P*) = {2}, **I**(*Q*) = {2}, **I**(*R*) = ...
Y si **I**(*P*) o **I**(*Q*) fuesen vacíos entonces los restantes podrían ser cualquier cosa, pues el antecedente del condicional sería siempre falso:
$\mathbf{I}_3$: **U** = {1,2,3,4,5}, **I**(*P*) = ∅, **I**(*Q*) = ..., **I**(*R*) = ...

EJEMPLO: Comprobar que la sentencia $\forall xy\ (Px \wedge Qy \wedge \neg x{\approx}y \rightarrow Rxy)$ es contingente.
Ya hemos dado al menos una interpretación que la hace verdadera. Veamos ahora que también hay al menos una interpretación que la hace falsa.
$\mathbf{I}_4$: **U** = {1,2,3,4,5}, **I**(*P*) = {1,3}, **I**(*Q*) = {3,4,}, **I**(*R*) = {<1,4>, <3,5>}.
Como se ve, el 3 está en **I**(*P*), el 4 está en **I**(*Q*), son diferentes y el 3 no está a la izquierda del 4 en **I**(*R*). Y lo mismo sucede con el 1 y el 3, respectivamente.

EJEMPLO: Comprobar que la sentencia $\forall x\ (Px \rightarrow \neg Px)$ es contingente.
En este caso, las interpretaciones más comunes la hacen falsa, pues si un objeto está en *P* entonces no puede no estar en *P*. P.e. la siguiente interpretación la hace falsa.
$\mathbf{I}_1$: **U**= {1,2,3}, **I**(*P*)= {1}

Pero eso no quiere decir que sea insatisfacible, pues las interpretaciones que hacen falso el antecedente la harán verdadera. Esto es, la interpretación tal que nada es *P*:
$\mathbf{I}_1$: **U**= {1,2,3}, **I**(*P*)= ∅

Veamos ahora algún ejemplo de fórmula insatisfacibe que sea posible demostrar que lo es siguiendo el procedimiento arriba indicado.

EJEMPLO: Mostrar que la sentencia $\exists x\ (Px \wedge \neg Px)$ es insatisfacible.
Supongamos que es satisfacible. Entonces habría **I** tal que, para algún objeto **o** del universo, $\mathbf{o} \in \mathbf{I}(P)$ y $\mathbf{o} \notin \mathbf{I}(P)$, pero ningún conjunto puede tener y no tener a la vez un mismo objeto como elemento (aquí hemos utilizado la versión informal de verdad para una sentencia existencial, pero se puede mostrar de modo plenamente satisfactorio con la versión formal).

EJEMPLO: Mostrar que la sentencia $\forall x\ (Px \leftrightarrow \neg Px)$ es insatisfacible.
Supongamos que es satisfacible. Entonces habría **I** tal que, para todo objeto **o** del universo, $\mathbf{o} \in \mathbf{I}(P)$ si y sólo si $\mathbf{o} \notin \mathbf{I}(P)$, pero no hay ningún conjunto que cumpla esa condición (de nuevo, la prueba pude hacerse con todo rigor usando la versión compleja de verdad para una sentencia universal).

Respecto de este último ejemplo, debe notarse que más arriba hemos probado que la sentencia con → en lugar de ↔ sí es satisfacible. La razón es que la condición "si $\mathbf{o} \in \mathbf{I}(P)$ entonces $\mathbf{o} \notin \mathbf{I}(P)$" sí es satisfecha por un conjunto, a saber, el conjunto vacío; esa condición es satisfecha por cualquier interpretación en la que $\mathbf{I}(P)=\varnothing$.

Vamos a ver ahora que la noción de satisfacibilidad se extiende de manera natural a conjuntos de sentencias.

SATISFACIBILIDAD PARA CONJUNTOS DE SENTENCIAS

— Un conjunto Σ de sentencias es *satisfacible* syss hay al menos una interpretación que satisface a todas las sentencias del conjunto, e.e. existe **I** tal que, para toda $\alpha \in \Sigma$ $\mathbf{I}(\alpha) = 1$.
— Un conjunto Σ de sentencias es *insatisfacible* syss no es satisfacible, e.e. si no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a todas las sentencias del conjunto a la vez.

Los comentarios anteriores sobre la imposibilidad de determinar en general si una fórmula es o no satisfacible se aplican exactamente igual a los conjuntos de ellas.

EJEMPLO: Comprobar que el conjunto $\{\forall x\ (\neg x{\approx}a \rightarrow Px),\ \exists x\ (Px \wedge Rax)\ \forall x \exists y\ Rxy\ \}$ es satisfacible.
Informalmente: la primera dice que todos los objetos, salvo quizás *a*, están en *P*; la segunda, que hay algo en *P* a la derecha de *a* en *R*; y la tercera, que todo objeto tiene alguien a su derecha en *R*. Veamos una interpretación que hace verdaderas a las tres sentencias a la vez.
I: **U**= {1,2,3,4}, **I**(*a*) = 2 , **I**(*P*) = {1,2,3,4}, **I**(*R*) = {<2,3>, <1,2>, <3,2>, <4,3>, <4,2>}

EJEMPLO: Mostrar que el conjunto $\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx), Pa, \neg Qa\}$ es insatisfacible.
Supongamos que es satisfacible. Entonces habría $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \rightarrow Qx))=1$, $\mathbb{I}(Pa)=1$ y $\mathbb{I}(\neg Qa)=1$. De los dos últimos se sigue que $\mathbb{I}(a)$, $\mathbb{I}(P)$ y $\mathbb{I}(Q)$ han de ser tales que $\mathbb{I}(a)\in \mathbb{I}(P)$ y $\mathbb{I}(a)\notin \mathbb{I}(Q)$. Pero por otro lado, que $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \rightarrow Qx))=1$ implica que si $\mathbb{I}(a)\in \mathbb{I}(P)$ entonces $\mathbb{I}(a)\in \mathbb{I}(Q)$. Así pues, no puede haber ninguna interpretación que cumpla todas estas condiciones.

EJERCICIOS: 66 a 85.

3. Consecuencia lógica, verdad lógica, equivalencia lógica: $\models$

Veremos ahora la noción semántica de *seguirse de*, el concepto de *consecuencia lógica*, y los relacionados de *verdad lógica* y *equivalencia lógica*. Estos conceptos están ahora referidos a lenguajes de primer orden, pero como se verá las definiciones son exactamente iguales a sus antecesores en L0. Lo único que cambia es que la noción de *interpretación* que involucran es, como hemos visto, mucho más compleja que la de L0.

CONSECUENCIA LÓGICA

La idea sigue siendo la misma: una sentencia es consecuencia lógica de otras cuando no puede ocurrir que éstas sean verdaderas y aquélla falsa, esto es, cuando no hay ninguna interpretación que hace verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión:

DEF Una sentencia β es *consecuencia lógica* de un conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de otras (y escribimos '$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$') syss$_{def}$ para toda $\mathbb{I}$, si $\mathbb{I}(\alpha_1)=1$ y ... y $\mathbb{I}(\alpha_n)=1$ entonces $\mathbb{I}(\beta)=1$.

Las observaciones que hicimos anteriormente sobre la imposibilidad de determinar en todos los casos si una fórmula (o conjunto de ellas) es o no satisfacible se extienden también a la relación de consecuencia, a través de un corolario que ya vimos y justificamos en L0 que relaciona consecuencia lógica y satisfacibilidad:

COROLARIO: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$ syss $\{\alpha_1, ..., \alpha_n, \neg\beta\}$ es insatisfacible.

Tenemos pues una definición precisa de la noción de consecuencia lógica. Pero para la lógica de primer orden ello no basta para poseer un *criterio para determinar* si una sentencia se sigue o no de otras. Lo único que podemos hacer de momento es, cuando β no sea consecuencia de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, mostrar que no lo es. ¿Cómo? Si β no es consecuencia de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, entonces no toda $\mathbb{I}$ que hace verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ hace verdadera a β; esto es, habrá alguna $\mathbb{I}$ que hará verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ pero falsa a β. Ofrecer una

tal $\mathbb{I}$ es demostrar que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \not\models \beta$. Eso es lo que se denomina dar una *prueba de la independencia* de β respecto de $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Pero, nuevamente, debe quedar claro que por el mero hecho de que no demos con una interpretación que haga verdaderas a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y falsa a β, no podemos asegurar que β sea consecuencia de $\alpha_1, ..., \alpha_n$; recuérdese que hay infinitas interpretaciones posibles y no podemos "inspeccionarlas" todas. No obstante, podremos demostrar, en algunos casos, que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$ por un procedimiento análogo al de la insatisfacibilidad de conjuntos de sentencias: supondremos que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \not\models \beta$, es decir, que hay $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}(\alpha_1)=1, ... \mathbb{I}(\alpha_n)=1$ y $\mathbb{I}(\beta)=0$; si una tal $\mathbb{I}$ debiera asignar entidades diferentes a al menos uno de los signos involucrados, entonces podemos concluir que no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a todas las premisas y falsa a la conclusión; por tanto, podemos concluir que no es cierto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \not\models \beta$, esto es, que sí es cierto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$.

EJEMPLO: Mostrar que $\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx), Qa\} \not\models Pa$
Debemos dar una prueba de independencia de Pa respecto de $\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx), Qa\}$. La siguiente interpretación hace verdaderas a las dos premisas y falsa a la conclusión:
$\mathbb{I}_1$: $\mathbb{U}=\{1,2,3\}$, $\mathbb{I}(a)=1$, $\mathbb{I}(P)=\{2\}$, $\mathbb{I}(Q)=\{1,2\}$
Y también:
$\mathbb{I}_2$: $\mathbb{U}$= el conjunto de los humanos, $\mathbb{I}(a)$= Picasso, $\mathbb{I}(P)$= el conjunto de los franceses, $\mathbb{I}(Q)$= el conjunto de los europeos.

EJEMPLO: Mostrar que $\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx), \exists x\ (Qx \wedge Rx)\} \not\models \exists x\ (Px \wedge Rx)$
La siguiente interpretación muestra la independencia de la conclusión respecto de las premisas:
$\mathbb{I}_1$: $\mathbb{U}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbb{I}(P)=\{1\}$, $\mathbb{I}(Q)=\{1,2\}$, $\mathbb{I}(R)=\{2,3\}$
Y también
$\mathbb{I}_2$: $\mathbb{U}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbb{I}(P)=\varnothing$, $\mathbb{I}(Q)=\{1,2\}$, $\mathbb{I}(R)=\{2,3\}$

EJEMPLO: Mostrar que $\{\forall x\ (Px \rightarrow Rxa), \forall x \exists y\ Rxy\} \not\models \forall xy\ (Rxy \rightarrow Ryx)$
La siguiente interpretación muestra la independencia de la conclusión respecto de las premisas:
$\mathbb{I}$: $\mathbb{U}=\{1,2,3\}$, $\mathbb{I}(a)=1$, $\mathbb{I}(P)=\{1,2\}$, $\mathbb{I}(R)=\{<1,1>, <2,1>, <3,3>\}$

EJEMPLO: Mostrar que $\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx), \neg Qa\} \not\models \neg Pa$
Supongamos que no fuese ese el caso. Habría entonces una $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \rightarrow Qx))=1$, $\mathbb{I}(\neg Qa)=1$ y $\mathbb{I}(\neg Pa)=0$. Entonces $\mathbb{I}(a)$, $\mathbb{I}(P)$ y $\mathbb{I}(Q)$ habrían de ser tales que $\mathbb{I}(a)\notin \mathbb{I}(Q)$ y $\mathbb{I}(a)\in \mathbb{I}(P)$. Pero por otro lado, $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \rightarrow Qx))=1$ implica que si $\mathbb{I}(a)\in \mathbb{I}(P)$ entonces $\mathbb{I}(a)\in \mathbb{I}(Q)$. Así pues, no puede haber ninguna interpretación que cumpla todas estas condiciones.

Conjuntos independientes

Muchas veces nos interesa tener un conjunto de sentencias tales que ninguna se siga de las demás, e.e. conjuntos en los que ninguna "sobre". De un conjunto tal que ninguna de sus sentencias es consecuencia de las restantes, diremos que es un *conjunto de fórmulas independientes*:

DEF $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es un *conjunto de sentencias independientes* syss para toda $\alpha_i \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ $(i \leq n)$: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} - \{\alpha_i\} \nvDash \alpha_i$

EJEMPLO: Mostrar que el conjunto $\{\forall x\ (Px \rightarrow Rxa), \forall x \exists y\ Rxy, \forall xy\ (Rxy \rightarrow Ryx)\}$ es un conjunto de sentencias independientes.
Hemos de mostrar que cada una de ellas es independiente de las dos restantes:
(a) $\{\forall x\ (Px \rightarrow Rxa), \forall x \exists y\ Rxy\} \nvDash \forall xy\ (Rxy \rightarrow Ryx)$
Esto ya se mostró en un ejemplo anterior.
(b) $\{\forall x\ (Px \rightarrow Rxa), \forall xy\ (Rxy \rightarrow Ryx)\} \nvDash \forall x \exists y\ Rxy$
I: **U**={1,2,3}, **I**(*a*)=1, **I**(*P*)={1,2}, **I**(*R*)={<1,1>, <2,1>, <1,2>}
(c) $\{\forall x \exists y\ Rxy, \forall xy\ (Rxy \rightarrow Ryx)\} \nvDash \forall x\ (Px \rightarrow Rxa)$,
I: **U**={1,2,3}, **I**(*a*)=2, **I**(*P*)={1,2}, **I**(*R*)={<1,1>, <2,1>, <1,2>, <3,3>}

También aquí, como en L0, la definición de consecuencia lógica implica que de premisas "contradictorias", e.e. insatisfacibles, se sigue cualquier cosa, y por exactamente los mismos motivos que entonces: si las premisas son insatisfacibles, entonces ninguna interpretación las hace a todas verdaderas, y por tanto ninguna interpretación las hace a todas verdaderas y a la conclusión falsa.

COROLARIO: Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es insatisfacible, entonces para toda β: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$.

VERDAD LÓGICA

Vimos ya en L0 que la noción de consecuencia lógica lleva asociada la noción de *verdad lógica*, de sentencia verdadera, no "en virtud de cómo es el mundo", sino *en virtud de su forma lógica*. Puesto que "el mundo" viene representado por una interpretación determinada (la estructura $S_{\mathbf{I}}$ asociada a una interpretación **I** es el "mundo" donde se evalúa la sentencia), una sentencia verdadera independientemente del mundo será una sentencia verdadera bajo toda interpretación posible:

DEF Una sentencia α es una *verdad lógica* (y escribimos '$\models \alpha$') syss_{def} para toda **I**, **I**(α)=1.

De nuevo, aunque la definición es perfectamente precisa, ello no supone que dispongamos de un criterio *general* para decidir de cada sentencia de L1 si es o no una verdad lógica. Dada una sentencia α, si hallamos una interpretación que la haga falsa sabremos entonces que no es una verdad lógica. Pero si no damos con una interpretación que la haga falsa, sólo de ello no se sigue que no la haya, e.e. no se sigue que sea una verdad lógica (recuérdese que hay infinitas interpretaciones). Lo que sí es posible, algunas veces, es mostrar que es una verdad lógica por un procedimiento análogo a los casos anteriores: supongamos que no es una verdad lógica, e.e. que hay **I** que la hace falsa; si de ese supuesto se sigue que **I** debe

asignar a un mismo signo entidades diferentes, entonces no hay ninguna interpretación tal que haga falsa la sentencia en cuestión y ésta es, por tanto, una verdad lógica.

EJEMPLO: Mostrar $\not\models \forall x\ (Px \to Rax)$
I: **U**={1,2,3}, **I**(a)=1, **I**(P)={1,2}, **I**(R)={<1,1>, <2,1>, <1,3>}
Para esta **I**, **I**($\forall x\ (Px \to Rax)$) = 0.

EJEMPLO: Mostrar $\models \forall x\ (Px \to Px)$
Supongamos que existiese una **I** tal que **I**($\forall x\ (Px \to Px)$)=0. Eso supone que hay algún objeto **o** del universo del que es falso ese condicional al que está aplicado el cuantificador universal, esto es, tal que **o**∈**I**(P) y a la vez **o**∉**I**(P); pero ningún conjunto satisface esa condición.

EJEMPLO: Mostrar $\models \neg\exists x\ (Px \wedge \neg Px)$
Supongamos que existiese una **I** tal que **I**($\neg\exists x\ (Px \wedge \neg Px)$)=0. Eso supone que **I**($\exists x\ (Px \wedge \neg Px)$) = 1, y por tanto hay algún objeto **o** del universo del que es cierta la conyunción a la que está aplicado el cuantificador existencial, esto es, tal que **o**∈**I**(P) y a la vez **o**∉**I**(P); pero ningún conjunto satisface esa condición.

Como complemento al hecho de que de premisas insatisfacibles es consecuencia cualquier cosa, tenemos también ahora, y por los mismos motivos que en L0, que las verdades lógicas son consecuencia de cualquier conjunto de premisas, sean éstas las que sean:

COROLARIO: Si $\models \beta$ entonces para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$.

Entre las innumerables (esquemas de) verdades lógicas de la lógica de primer orden, algunas especialmente destacadas (junto con las que vimos en L0) son las siguientes (inténtese mostrar que lo son por el procedimiento usado en el último ejemplo; se sobreentiende que todos son esquemas de sentencias, esto es, que las fórmulas interiores tienen a lo sumo libre la variable a la que se aplica el cuantificador).

(1) $\models \neg\exists \mathbf{x}\ (\alpha \wedge \neg\alpha)$
(2) $\models \forall \mathbf{x}\ (\alpha \vee \neg\alpha)$
(3) $\models \forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \alpha)$
(4) $\models \forall \mathbf{x}\ (\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha)$
(5) $\models \forall \mathbf{x}\ \alpha \to \alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}]$
(6) $\models \alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}] \to \exists \mathbf{x}\ \alpha$
(7) $\models \forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \to (\forall \mathbf{x}\ \alpha \to \forall \mathbf{x}\ \beta)$
(8) $\models (\forall \mathbf{x}\ \alpha \vee \forall \mathbf{x}\ \beta) \to \forall \mathbf{x}\ (\alpha \vee \beta)$
(9) $\models \exists \mathbf{x}\ (\alpha \wedge \beta) \to (\exists \mathbf{x}\ \alpha \wedge \exists \mathbf{x}\ \beta)$
(10) $\models \forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \to (\exists \mathbf{x}\ \alpha \to \exists \mathbf{x}\ \beta)$
(11) $\models \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y}\ \alpha \to \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x}\ \alpha$
(12) $\models \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} \approx \mathbf{x}$
(13) $\models \forall \mathbf{xy}\ (\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \to \mathbf{y} \approx \mathbf{x})$
(14) $\models \forall \mathbf{xyz}\ (\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \approx \mathbf{z} \to \mathbf{x} \approx \mathbf{z})$

EQUIVALENCIA LÓGICA

La última de las nociones semánticas que debemos ver es la de *equivalencia lógica*. Es ésta la noción a la que nos referíamos cuando en la presentación del lenguaje mencionamos la posibilidad de formalizaciones alternativas *equivalentes*. Recuérdese que la idea que subyace a esta noción es que dos sentencias son lógicamente equivalentes si "dicen lo mismo". Pero si dos fórmulas dicen lo mismo, entonces serán verdaderas o falsas en las mismas circunstancias, no puede ser que haya una situación en que una sea verdadera y la otra falsa, esto es, no puede haber una misma interpretación haga verdadera a una y falsa a la otra:

DEF Dos sentencias α y β son *lógicamente equivalentes* (y escribimos '$\alpha \models\mid \beta$') syss$_{def}$ para toda $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}(\alpha)=\mathbb{I}(\beta)$.

Para establecer que dos sentencias *no* son lógicamente equivalentes bastará por tanto dar con una interpretación que haga verdadera a una de ellas y falsa a la otra. De nuevo, si no se halla una interpretación tal, ello por sí solo no permite concluir que son equivalentes. En algunos casos, no obstante, sí podemos concluir que son equivalentes, en los casos en los que la suposición de que hay una interpretación que hace verdadera a una y falsa a la otra obliga a que dicha interpretación asigne objetos diferentes a un mismo signo.

EJEMPLO: Mostrar que $\exists x\ (Px \wedge Qx) \not\models\mid \exists x\ Px \wedge \exists x\ Qx$
La interpretación $\mathbb{I}$: $\mathbb{U} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{I}(P)=\{1\}$, $\mathbb{I}(Q)=\{2\}$, es tal que $\mathbb{I}(\exists x\ Px \wedge \exists x\ Qx)=1$ y $\mathbb{I}(\exists x(Px \wedge Qx))=0$

EJEMPLO: Mostrar que $\forall x \exists y\ Rxy \not\models\mid \exists y \forall x\ Rxy$
La interpretación $\mathbb{I}$: $\mathbb{U} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{I}(R)=\{<1,2>, <2,3>, <3,2>\}$, es tal que $\mathbb{I}(\forall x \exists y\ Rxy)=1$ y $\mathbb{I}(\exists y \forall x\ Rxy)=0$

EJEMPLO: Mostrar que $\forall x\ (Px \wedge Qx) \models\mid \forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx$
Supongamos que existiese una $\mathbb{I}$ tal que, p.e. $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \wedge Qx))=0$ y $\mathbb{I}(\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx)=1$. De esto último se sigue que $\mathbb{I}(\forall x\ Px)=1$ y $\mathbb{I}(\forall x\ Qx)=1$. Como $\mathbb{I}(\forall x\ Px)=1$, todo objeto de $\mathbb{U}$ está en $\mathbb{I}(P)$. Como $\mathbb{I}(\forall x\ Qx)=1$, todo objeto de $\mathbb{U}$ está en $\mathbb{I}(Q)$. Así, todo objeto de $\mathbb{U}$ está a la vez en $\mathbb{I}(P)$ y en $\mathbb{I}(Q)$, contra $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \wedge Qx))=0$. Así, no hay $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \wedge Qx))=0$ y $\mathbb{I}(\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx)=1$. Veamos si es posible la otra opción, a saber, que haya $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \wedge Qx))=1$ y $\mathbb{I}(\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx)=0$. De esto último se sigue que $\mathbb{I}(\forall x\ Px)=0$ o $\mathbb{I}(\forall x\ Qx)=0$. Como $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \wedge Qx))=1$, entonces todo objeto de $\mathbb{U}$ está a la vez en $\mathbb{I}(P)$ y en $\mathbb{I}(Q)$. Pero entonces, todo objeto de $\mathbb{U}$ está al menos en $\mathbb{I}(P)$, contra $\mathbb{I}(\forall x\ Px)=0$, y está también al menos en $\mathbb{I}(Q)$, contra $\mathbb{I}(\forall x\ Qx)=0$. Por tanto, ni $\mathbb{I}(\forall x\ Px)=0$ ni $\mathbb{I}(\forall x\ Qx)=0$. Así, tampoco hay $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}(\forall x\ (Px \wedge Qx))=1$ y $\mathbb{I}(\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx)=0$.

A continuación damos (los esquemas de) algunas equivalencias lógicas especialmente destacadas (intente el lector mostrar que efectivamente lo son; recuérdese que en nuestro caso deben tomarse todas como —esquemas de— sentencias, ello hace redundantes las condiciones entre paréntesis en los casos (25) a (34)).

(15) $\forall x\ \alpha \Dashv\vDash \neg\exists x\ \neg\alpha$
(16) $\exists x\ \alpha \Dashv\vDash \neg\forall x\ \neg\alpha$
(17) $\neg\forall x\ \alpha \Dashv\vDash \exists x\ \neg\alpha$
(18) $\neg\exists x\ \alpha \Dashv\vDash \forall x\ \neg\alpha$
(19) $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \Dashv\vDash \forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta$
(20) $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \Dashv\vDash \exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta$
(21) $\forall xy\ \alpha \Dashv\vDash \forall yx\ \alpha$
(22) $\exists xy\ \alpha \Dashv\vDash \exists yx\ \alpha$
(23) $\forall x\ \alpha \Dashv\vDash \forall y\ \alpha[x,y]$ (si y no aparece en α)
(24) $\exists x\ \alpha \Dashv\vDash \exists y\ \alpha[x,y]$ (si y no aparece en α)
(25) $\forall x\ \alpha \Dashv\vDash \alpha$ (si **x** no está libre en α)
(26) $\exists x\ \alpha \Dashv\vDash \alpha$ (si **x** no está libre en α)
(27) $\forall x\ (\alpha \to \beta) \Dashv\vDash \alpha \to \forall x\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(28) $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \Dashv\vDash \alpha \wedge \forall x\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(29) $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \Dashv\vDash \alpha \vee \forall x\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(30) $\exists x\ (\alpha \to \beta) \Dashv\vDash \alpha \to \exists x\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(31) $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \Dashv\vDash \alpha \wedge \exists x\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(32) $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \Dashv\vDash \alpha \vee \exists x\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(33) $\forall x\ (\alpha \to \beta) \Dashv\vDash \exists x\ \alpha \to \beta$ (si **x** no está libre en β)
(34) $\exists x\ (\alpha \to \beta) \Dashv\vDash \forall x\ \alpha \to \beta$ (si **x** no está libre en β)

Como en L0, es inmediato mostrar que la equivalencia lógica es una *relación de equivalencia*, esto es, reflexiva, simétrica y transitiva, como establece el siguiente corolario:

COROLARIO: Para toda α: $\alpha \Dashv\vDash \alpha$
Para toda α, β: Si $\alpha \Dashv\vDash \beta$ entonces $\beta \Dashv\vDash \alpha$
Para toda α, β, γ: Si $\alpha \Dashv\vDash \beta$ y $\beta \Dashv\vDash \gamma$ entonces $\alpha \Dashv\vDash \gamma$

Y también vale ahora el principio general de sustitución de subfórmulas equivalentes que ya vimos en L0:

COROLARIO: Para toda α, β, γ, δ: si β es una subfórmula de α, $\beta \Dashv\vDash \gamma$ y δ es el resultado de sustituir β por γ en α, entonces $\delta \Dashv\vDash \alpha$

En concreto, aplicado a fórmulas cuantificacionales:

Si $\alpha \Dashv\vDash \beta$, entonces $\forall x\ \alpha \Dashv\vDash \forall x\ \beta$ y $\exists x\ \alpha \Dashv\vDash \exists x\ \beta$

Aplicando este principio, y el de transitividad de la equivalencia (junto con algunas de las equivalencias anteriores) podemos ampliar la lista de (esquemas de) equivalencias:

(35) $\forall x\ (Px \to Qx) \Dashv\vDash \forall x\ (\neg Qx \to \neg Px)$
(36) $\forall x\ (Px \wedge Qx) \Dashv\vDash \forall x\ (Qx \wedge Px)$
(37) $\forall x\ (Px \vee Qx) \Dashv\vDash \forall x\ (Qx \vee Px)$
(38) $\forall x\ (Px \leftrightarrow Qx) \Dashv\vDash \forall x\ (Qx \leftrightarrow Px)$
(39) $\exists x\ (Px \wedge Qx) \Dashv\vDash \exists x\ (Qx \wedge Px)$
(40) $\exists x\ (Px \vee Qx) \Dashv\vDash \exists x\ (Qx \vee Px)$
(41) $\exists x\ (Px \leftrightarrow Qx) \Dashv\vDash \exists x\ (Qx \leftrightarrow Px)$
(42) $\forall x\ (Px \to Qx) \Dashv\vDash \neg\exists x\ (Px \wedge \neg Qx)$

(43) $\forall \mathbf{x} (\mathbf{Px} \to \neg \mathbf{Qx}) \dashv\vDash \neg \exists \mathbf{x} (\mathbf{Px} \land \mathbf{Qx})$
(44) $\exists \mathbf{x} (\mathbf{Px} \land \mathbf{Qx}) \dashv\vDash \neg \forall \mathbf{x} (\mathbf{Px} \to \neg \mathbf{Qx})$
(45) $\exists \mathbf{x} (\mathbf{Px} \land \neg \mathbf{Qx}) \dashv\vDash \neg \forall \mathbf{x} (\mathbf{Px} \to \mathbf{Qx})$

Las nociones de *consecuencia lógica*, *verdad lógica* y *equivalencia lógica* están relacionadas exactamente igual que en lógica proposicional:

(a) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vDash \beta$ syss $\vDash \alpha_1 \land ... \land \alpha_n \to \beta$.

(b) $\alpha \dashv\vDash \beta$ syss $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$.

(c) $\alpha \dashv\vDash \beta$ syss $\{\alpha\} \vDash \beta$ y $\{\beta\} \vDash \alpha$

Puede el lector ampliar por tanto, usando (b), la lista de verdades lógicas a partir de las equivalencias lógicas.

EJERCICIOS: 86 a 103.

4. Interdefinibilidad de cuantificadores

Las anteriores equivalencias (15) y (16), e.e.

$\forall \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vDash \neg \exists \mathbf{x}\ \neg \alpha$
$\exists \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vDash \neg \forall \mathbf{x}\ \neg \alpha$

muestran algo que avanzamos en la presentación del lenguaje, a saber, que no es indispensable contar con los dos cuantificadores como signos primitivos. Análogamente al modo en que unas conectivas eran definibles a partir de otras, uno de los dos cuantificadores es definible a partir del otro y del negador: con uno de ellos y el negador podemos expresar todo lo que podemos expresar mediante el otro.

La comparación entre los interdefinibilidad de los cuantificadores en L1 y la de las conectivas quizás haya sugerido al lector una pregunta análoga a otra que nos hicimos en L0 (cf. cap. 3 sec. 5). En efecto, vimos en L0 que había más conectivas que las cinco inicialmente presentadas, como la negación conjunta "ni ... ni ..." o la disyunción exclusiva "o bien ... o bien...". Podíamos haberlas tomado también como primitivas pero no lo hicimos porque eran expresables, interdefinibles, mediante una combinación de las que ya teníamos. De hecho, las cinco que presentamos inicialmente no eran todas necesarias, en eso consistía la interdefinibilidad de las conectivas que acabamos de mencionar. Pues bien, podemos preguntarnos, ¿no sucederá con los cuantificadores algo análogo?, ¿no habrá también "otros" cuantificadores?, y si los hay, ¿serán también definibles a partir de los que ya tenemos e innecesario por tanto tomarlos como primitivos?

Efectivamente, hay también "otros" cuantificadores. Por ejemplo, 'ningún'. Podríamos haberlo tomado como primitivo y asignarle un signo, por ejemplo '**N**', de modo que **Nx** α significase "no hay ningún individuo tal que α", o "nada es tal que α". Pero no es necesario tomarlo como primitivo pues es fácilmente interdefinible a partir de los que ya disponemos,

en concreto, a partir del existencial y el negador. La siguiente equivalencia muestra la posible definición:

$\mathbf{Nx}\ \alpha \vDash\!\!\!\!\!\dashv \neg\exists\mathbf{x}\ \alpha$

Aunque 'ningún' es el caso más manifiesto de cuantificador "adicional", por cuanto le corresponde una expresión relativamente simple del lenguaje natural, no es desde luego el único caso. Cuando comentamos las expresiones ambiguas en la formalización del lenguaje de primer orden, vimos que en ciertos contextos se tiende a interpretar 'algo es tal', no como significando sólo que hay al menos un individuo que es tal (interpretación que hemos adoptado), sino como algo más fuerte, a saber, significando que al menos un individuo es tal *y al menos otro no lo es*. Pues bien, podríamos acuñar la expresión '@lgún' para abreviar esa paráfrasis e introducir un signo primitivo nuevo en nuestro alfabeto formal para expresar ese cuantificador, por ejemplo 'Φ', de modo que $\Phi\mathbf{x}\ \alpha$ significase "algún individuo es tal que α y algún individuo es tal que no α". Al igual que ocurre con 'ningún', no es necesario introducir '@lgún' como primitivo pues es definible a partir de los que ya disponemos, en particular a partir del existencial y el negador, como muestra la siguiente equivalencia:

$\Phi\mathbf{x}\ \alpha \vDash\!\!\!\!\!\dashv \exists\mathbf{x}\ \alpha \wedge \exists\mathbf{x}\ \neg\alpha$

Y con éste tampoco concluyen los nuevos casos. Cuando presentamos la formalización del lenguaje natural (cap. 6 sec. 3) vimos que el lenguaje natural contenía expresiones que se podían calificar de "cuantificadores numéricos", expresiones del tipo 'hay al menos cuatro...', 'hay como máximo tres...' o 'hay dos ...'. Pues bien, en sentido estricto, esas expresiones son también cuantificadores y podríamos haber introducido en el alfabeto lógico signos primitivos para ellos, por ejemplo, '$\exists_4$', '$\exists^3$' y '$\exists 2$' respectivamente. Como entonces vimos, no es necesario introducirlos como cuantificadores primitivos porque eran expresables a partir de los que disponemos, como muestra p.e. para el último caso la siguiente equivalencia que quedó entonces justificada:

$\exists 2\ \mathbf{x}\ \alpha(\mathbf{x}) \vDash\!\!\!\!\!\dashv \exists\mathbf{xy}\ (\alpha(\mathbf{x}) \wedge \alpha(\mathbf{y}) \wedge \neg\mathbf{x}{\approx}\mathbf{y} \wedge \forall\mathbf{z}\ (\alpha(\mathbf{z}) \rightarrow (\mathbf{z}{\approx}\mathbf{x} \vee \mathbf{z}{\approx}\mathbf{y})))$

Quizás el lector se esté preguntando ahora: ¿y cuántos cuantificadores hay? ¿sucede aquí lo mismo que en L0, donde podíamos especificar el número de diferentes conectivas, p.e. binarias, posibles? Veamos. Cada cuantificador se "identifica" por su definición semántica, esto es, por las condiciones en que la fórmula de la que es signo principal es verdadera. Así, si utilizamos 'K' como variable para los diferentes cuantificadores posibles, tenemos el siguiente esquema:

$\mathbf{I}\ (\mathbf{Kx}\ \alpha) = 1$ syss ???????????

Hay tantos cuantificadores como diferentes modos de rellenar los interrogantes "apelando a la cantidad" (ahora expresamos las condiciones informalmente):

— para "α es verdadera de todos los objetos del universo", K es $\forall$
— para "α es verdadera de al menos un individuo del universo", K es $\exists$
— para "α es falsa de todo individuo del universo", K es N
— para "α es verdadera de al menos un individuo del universo y falsa de al menos otro", K es Φ
— para "α es verdadera de dos individuos del universo", K es $\exists 2$

El lector quizás habrá advertido ya que no es posible ahora determinar cuántos cuantificadores diferentes hay, pues no hay modo de determinar cuántas condiciones diferentes pueden ocupar el lugar de los interrogantes. La primera dificultad es que muchas de esas condiciones dependen del tamaño del universo, de cuántos individuos tenga el universo de discurso, lo cual no se puede determinar a priori. Podría pensarse, entonces, que, supuesto determinados la cantidad de objetos del universo, el número de cuantificadores estaría determinado, por ejemplo, tantos como subconjuntos del universo. Pero no es así, no corresponde un subconjunto a cada cuantificador. Por ejemplo, para $\exists$ "vale" cualquier subconjunto que tenga al menos un elemento, es decir, todos menos el subconjunto vacío. Para Φ "vale" cualquier subconjunto que tenga al menos un elemento salvo el universo completo mismo. Para $\exists^3$ "vale" cualquier subconjunto que tengo como máximo tres elementos. Para $\exists 2$ "vale" cualquier subconjunto que tenga exactamente dos elementos. Etcétera. Eso sugeriría que hay tantos cuantificadores como conjuntos de subconjuntos del universo. Pero ni siquiera se acaba aquí la complicación. Cuando presentamos el cuantificador existencial, vimos que el lenguaje natural contienen cuantificadores existenciales *sensibles al contexto*, expresiones como 'muchos', 'pocos', 'bastantes', 'demasiados', etc. Aunque para simplificar los identificábamos con $\exists$, eso no era inocuo, pues esos cuantificadores tienen diferente función lógica que $\exists$, y diferentes entre sí también: la sustitución de uno por otro en un argumento puede alterar la validez/invalidez del argumento original. Por un lado, está relativamente indeterminado el número de tales expresiones. Y por otro, aunque estuviera determinado, la condición con que cada uno rellenaría los interrogantes podría cambiar de contexto a contexto. Todo ello hace que la pregunta por la cantidad de cuantificadores diferentes que hay no tenga una respuesta clara ni siquiera relativamente al universo de discurso.

Para concluir con la semántica de primer orden, y antes de aplicarla a argumentos del lenguaje natural, vamos a ver un tipo de equivalencias especiales, las *fórmulas prenexas*.

5. Formas prenexas

Diremos que una fórmula está en *forma prenexa* cuando consista en una serie de cuantificadores seguidos de una fórmula que no contiene cuantificadores. Así, p.e. las fórmulas

$\forall xy\ Rxy$
$\forall xy\ (Rax \rightarrow \neg Rya)$

$\forall x \exists y\ (Rax \rightarrow \neg Rya)$
$\forall xyz\ (\ (Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz\ )$
$\forall xy \exists z\ (Rzx \wedge \neg Ryz)$
$\forall x\ \exists yz\ \forall v\ (\ (Rxy \wedge Rxz \wedge \neg y{\approx}z) \rightarrow \neg Rxv)$

están en forma prenexa, y las fórmulas que siguen no lo están:

$\forall x\ Px \rightarrow \exists x\ Qx$
$\forall x\ (Px \rightarrow \exists y\ Qy)$
$\forall x\ (Px \rightarrow \exists y\ Rxy)$
$\forall x\ (Px \rightarrow \forall y\ Rxy)$
$\forall x\ (Px \rightarrow \forall y\ (Py \rightarrow Rxy)\ )$
$\forall x\ (\forall y\ Rxy \rightarrow Rax)$
$\forall x\ (\exists y\ Rxy \rightarrow \exists y\ Ryx)$
$\forall x\ (Px \rightarrow \exists y\ (Rxy \wedge \forall z\ Rzx)\ )$

Se puede probar, aunque no lo haremos aquí, que para toda sentencia cuantificada hay una fórmula prenexa equivalente a ella. En lugar de probarlo, veremos mediante unos ejemplos cómo obtener formas prenexas utilizando los esquemas de equivalencias anteriores (y el principio de transitividad de la equivalencia) y daremos después un procedimiento general.

EJEMPLO: $\forall x\ (Px \vee \exists y\ Qy)$
$\models\mid$ $\forall x\ \exists y\ (Px \vee Qy)$ por (32)

EJEMPLO: $\forall x\ Px \rightarrow \exists x\ Qx$
$\models\mid$ $\forall x\ Px \rightarrow \exists y\ Qy$ por (24)
$\models\mid$ $\exists x\ (\ Px \rightarrow \exists y\ Qy)$ por (34)
$\models\mid$ $\exists x \exists y\ (Px \rightarrow Qy)$ por (30)

EJEMPLO: $\forall x\ Px \rightarrow \forall x\ Qx$
$\models\mid$ $\forall x\ Px \rightarrow \forall y\ Qy$ por (24)
$\models\mid$ $\exists x\ (\ Px \rightarrow \forall y\ Qy)$ por (34)
$\models\mid$ $\exists x \forall y\ (Px \rightarrow Qy)$ por (27)

EJEMPLO: $\forall x\ (Px \rightarrow \forall y\ Rxy)$
$\models\mid$ $\forall x\ \forall y\ (Px \rightarrow Rxy\ )$ por (27)

EJEMPLO: $\forall x\ (\exists y\ Rxy \rightarrow \exists y\ Ryx)$
$\models\mid$ $\forall x\ (\exists y\ Rxy \rightarrow \exists z\ Rzx)$ por (24)
$\models\mid$ $\forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow \exists z\ Rzx)$ por (33)
$\models\mid$ $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (Rxy \rightarrow Rzx)$ por (30)

EJEMPLO: $\forall x\ (Px \rightarrow \exists y\ (Rxy \wedge \forall z\ Rzx)\ )$
$\models\mid$ $\forall x\ (Px \rightarrow \exists y\ \forall z\ (Rxy \wedge Rzx)\ )$ por (28)
$\models\mid$ $\forall x\ \exists y\ (Px \rightarrow \forall z\ (Rxy \wedge Rzx)\ )$ por (30)
$\models\mid$ $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (Px \rightarrow (Rxy \wedge Rzx)\ )$ por (27)

Podemos seguir en general el siguiente procedimiento para obtener formas normales prenexas:

(i) si el signo principal es un bicondicional $\alpha \leftrightarrow \beta$, se transforma en $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ y se aplica después la cláusula (ii)

(ii) si el signo principal es $\wedge$, $\vee$ o $\rightarrow$, flanqueado de sentencias que no están en forma prenexa, se pasan dichas sentencias a forma prenexa y después se aplica (iii)

(iii) si el signo principal es $\wedge$, $\vee$ o $\rightarrow$, flanqueado de sentencias en forma prenexa, se exteriorizan los cuantificadores de estas sentencias aplicando las siguientes equivalencias (que cubren todas las posibilidades) tantas veces como haga falta (nótese que en las fórmulas de la parte derecha la variable cuantificada nunca estará libre en ninguna de las fórmulas que flanquean al conector, pues hemos establecido que son todas sentencias):
(a) $\forall \mathbf{x} \, (\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \wedge \forall \mathbf{x} \, \beta$
(b) $\exists \mathbf{x} \, (\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \wedge \exists \mathbf{x} \, \beta$
(c) $\forall \mathbf{x} \, (\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \vee \forall \mathbf{x} \, \beta$
(d) $\exists \mathbf{x} \, (\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \vee \exists \mathbf{x} \, \beta$
(e) $\forall \mathbf{x} \, (\alpha \rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \rightarrow \forall \mathbf{x} \, \beta$
(f) $\forall \mathbf{x} \, (\alpha \rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv \exists \mathbf{x} \, \alpha \rightarrow \beta$
(g) $\exists \mathbf{x} \, (\alpha \rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \rightarrow \exists \mathbf{x} \, \beta$
(h) $\exists \mathbf{x} \, (\alpha \rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv \forall \mathbf{x} \, \alpha \rightarrow \beta$

(iv) si el signo principal es $\neg$ aplicado a un cuantificador, se aplica alguna de las equivalencias
$\neg \forall \mathbf{x} \, \alpha \models\!\!\!\dashv \exists \mathbf{x} \, \neg \alpha$
$\neg \exists \mathbf{x} \, \alpha \models\!\!\!\dashv \forall \mathbf{x} \, \neg \alpha$
y se pasa después al paso (vi)

(v) si el signo principal es $\neg$ aplicado a una conectiva binaria, se aplica alguna de las equivalencias (nótese que, por (i), ninguna conectiva será $\leftrightarrow$)
$\neg(\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \neg \alpha \vee \neg \beta$
$\neg(\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv \neg \alpha \wedge \neg \beta$
$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha \wedge \neg \beta$
y se pasa después al paso (ii) o (iii)

(vi) si el signo principal es un cuantificador, se transforma a forma prenexa la fórmula que le sigue mediante alguno de los pasos anteriores.

EJEMPLO: $(Pa \wedge \exists x \, Rxa) \rightarrow \neg \forall y \, (Py \vee Rya)$
$\models\!\!\!\dashv \exists x \, (Pa \wedge Rxa) \rightarrow \exists y \, \neg(Py \vee Rya)$ por (iiib) aplicado al antecedente y (iv) al consecuente.
$\models\!\!\!\dashv \forall x \, ((Pa \wedge Rxa) \rightarrow \exists y \, \neg(Py \vee Rya))$ por (iiif)
$\models\!\!\!\dashv \forall x \, \exists y \, ((Pa \wedge Rxa) \rightarrow \neg(Py \vee Rya))$ por (iiig)

Las formas prenexas, como veremos en el cap. 9, son importantes por su aplicación al problema de la decidibilidad.

EJERCICIOS: 104 y 105.

6. Prueba semántica de la invalidez de argumentos

Ahora podemos ver ya, para concluir, la aplicación de la semántica de primer orden al análisis de argumentos en lenguaje natural. Por todo lo dicho anteriormente, debe estar claro que tal aplicación no puede consistir en general, como en L0, en *determinar* si el argumento es válido. Lo único que aquí va a ser en general posible es *comprobar* que un argumento inválido es efectivamente inválido. Para ello, no tenemos más que combinar dos cosas que hemos visto con anterioridad:

(a) identificar y formalizar las premisas y la conclusión;
(b) dar una prueba de independencia de la conclusión respecto de las premisas.

EJEMPLO: "Los filósofos son amantes de la sabiduría. Algunos amantes de la sabiduría persiguen el bien. Por tanto, algunos filósofos persiguen el bien".

Signos primitivos:
$F \equiv$ ser filósofo
$A \equiv$ amar la sabiduría
$P \equiv$ perseguir el bien

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv \forall x\ (Fx \rightarrow Ax)$
$\alpha_2 \equiv \exists x\ (Ax \wedge Px)$
$\beta \equiv \exists x\ (Fx \wedge Px)$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \not\models \beta$:
La siguiente interpretación hace verdaderas a α_1, α_2 y falsa a β.
$\mathbf{I}$: $\mathbf{U} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbf{I}(F) = \{1,2\}$, $\mathbf{I}(A) = \{1,2,3\}$, $\mathbf{I}(P) = \{3,4\}$

EJEMPLO: "Ningún existencialista aprecia a ningún miembro del Círculo de Viena. Los miembros del Círculo de Viena son positivistas. Ningún existencialista aprecia a ningún positivista"

Signos primitivos:
$E \equiv$ ser existencialista
$P \equiv$ ser positivista
$M \equiv$ ser miembro del Círculo de Viena
$A \equiv$ apreciar a

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv \forall xy\ (\ (Ex \wedge My) \rightarrow \neg Axy)$
$\alpha_2 \equiv \forall x\ (Mx \rightarrow Px)$
$\beta \equiv \forall xy\ (\ (Ex \wedge Py) \rightarrow \neg Axy)$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \not\models \beta$:
La siguiente interpretación hace verdaderas a α_1, α_2 y falsa a β.
$\mathbf{I}$: $\mathbf{U} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbf{I}(E) = \{1,2\}$, $\mathbf{I}(M) = \{3\}$, $\mathbf{I}(P) = \{3,4\}$, $\mathbf{I}(A) = \{<2,4>\}$

EJEMPLO: "Platón admira a algún sofista que enseña gratuitamente. Sócrates es sofista y enseña gratuitamente. Hay como máximo un sofista que enseña gratuitamente. No siempre que uno admira a alguien es a la vez admirado por él. Por tanto, Sócrates no admira a Platón."

Signos primitivos:
$a \equiv$ Platón
$b \equiv$ Sócrates
$S \equiv$ ser sofista
$E \equiv$ enseñar gratuitamente
$A \equiv$ admirar a

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv \exists x\ (Sx \wedge Ex \wedge Aax)$
$\alpha_2 \equiv Sb \wedge Eb$
$\alpha_3 \equiv \forall xy\ (\ (Sx \wedge Ex \wedge Sy \wedge Ey) \rightarrow x \approx y)$
$\alpha_4 \equiv \neg\forall xy\ (Axy \rightarrow Ayx)$
$\beta \equiv \neg Aba$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \nvDash \beta$:
La siguiente interpretación hace verdaderas a α_1, α_2, α_3, α_4 y falsa a β.
$\mathbf{I}$: $\mathbf{U} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbf{I}(a) = 1$, $\mathbf{I}(b) = 2$, $\mathbf{I}(S) = \{2,4\}$, $\mathbf{I}(E) = \{2,3\}$, $\mathbf{I}(A) = \{<2,1>, <1,1>, <1,3>\}$

EJERCICIOS: 106 a 115.

Ejercicios

Comprobar que las siguientes fórmulas son contingentes.

66 $\exists$x (Rx $\wedge$ $\neg$Pax)
67 $\forall$x (Sxa $\rightarrow$ Sbx)
68 $\exists$x (Px $\wedge$ $\forall$y (Ray $\rightarrow$ x$\approx$y))
69 $\forall$x (x$\approx$a $\rightarrow$ Rbx)
70 $\forall$x$\exists$y ($\neg$x$\approx$y $\wedge$ Rxy)
71 $\exists$xyz (Rax $\wedge$ Ray $\wedge$ Rxz $\wedge$ $\neg$Rzy)
72 $\forall$xyz ((Rxy $\wedge$ Ryz) $\rightarrow$ Rxz)
73 $\forall$xy ((Rxy $\wedge$ Ryx) $\rightarrow$ x$\approx$y)
74 $\forall$xy ((Dx $\wedge$ Dy) $\rightarrow$ (Rxy $\vee$ Ryx))
75 $\forall$x$\exists$y (Py $\leftrightarrow$ x$\approx$y)

Para cada una de las siguientes interpretaciones, dar una sentencia que se satisfecha por la interpretación y otra que no lo sea

76 $\mathbf{U}$={0,1,2,3,4,5}
$\mathbf{I}$(Q)={1,3,5}
$\mathbf{I}$(R)={<1,0>,<4,3>,<5,2>,<2,4>}
$\mathbf{I}$(a)=3

77 $\mathbb{U}=\{0,1,2,3,4,5\}$
$\mathbb{I}(Q)=\{1,3,4\}$
$\mathbb{I}(R)=\{<1,0>,<1,3>,<5,2>,<2,4>\}$
$\mathbb{I}(a)=0$
$\mathbb{I}(b)=1$

78 $\mathbb{U}=\{x/x$ es humano$\}$
$\mathbb{I}(V)=\{x\in \mathbb{U}/x$ es varón$\}$
$\mathbb{I}(H)=\{<x\,,\,y>\in \mathbb{U}x\mathbb{U}/x$ es hermano de $y\}$

79 $\mathbb{U}=\{x/x$ es humano$\}$
$\mathbb{I}(V)=\{x\in \mathbb{U}/x$ es varón$\}$
$\mathbb{I}(F)=\{x\in \mathbb{U}/x$ es mujer$\}$
$\mathbb{I}(H)=\{<x\,,\,y>\in \mathbb{U}x\mathbb{U}/x$ es más alto que $y\}$
$\mathbb{I}(a)=$Juan Carlos I

80 $\mathbb{U}=\{x/x$ es nº natural$\}$
$\mathbb{I}(P)=\{x\in \mathbb{U}/x$ es par$\}$
$\mathbb{I}(M)=\{<x\,,\,y>\in \mathbb{U}x\mathbb{U}/x$ es múltiplo de $y\}$
$\mathbb{I}(a)=2$

81 $\mathbb{U}=\{x/x$ es nº natural$\}$
$\mathbb{I}(P)=\{x\in \mathbb{U}/x$ es primo$\}$
$\mathbb{I}(M)=\{<x\,,\,y>\in \mathbb{U}x\mathbb{U}/x>y\}$
$\mathbb{I}(a)=1$

Comprobar que los siguientes conjuntos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ son satisfacibles.

82 $\alpha_1\equiv \forall x\,(Px \vee Qx)$ $\alpha_2\equiv \neg\exists x\,(Px \wedge Qx)$
83 $\alpha_1\equiv \forall xy\,(Pxy \rightarrow \neg Pyx)$ $\alpha_2\equiv \exists x\,(Qx \wedge Pxa)$ $\alpha_3\equiv \forall x\,\exists y\,(y\neq a \wedge Pxy)$
84 $\alpha_1\equiv \exists x\,(Rx \wedge \neg Pax)$ $\alpha_2\equiv \forall x\,(Pxa \rightarrow Pbx)$ $\alpha_3\equiv \exists x\,(Rx \wedge \forall y\,(Pay \rightarrow x\approx y))$
85 $\alpha_1\equiv \exists xyx\,(\neg x\approx y \wedge \neg x\approx z \wedge \neg y\approx z \wedge \forall t\,(t\approx x \vee t\approx y \vee t\approx z))$

Comprobar la falsedad de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$ en los siguientes casos.

86 $\alpha_1\equiv \forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ $\beta\equiv \exists x\,(Px \wedge Qx)$
87 $\alpha_1\equiv \exists x\,Px$ $\beta\equiv \forall x\,Px$
88 $\alpha_1\equiv \forall x\,(Px \vee Qx)$ $\beta\equiv \forall x\,Px \vee \forall x\,Qx$
89 $\alpha_1\equiv \exists x\,Px \wedge \exists x\,Qx$ $\beta\equiv \exists x\,(Px \wedge Qx)$
90 $\alpha_1\equiv \forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ $\alpha_2\equiv \forall x\,(Qx \rightarrow Rx)$ $\beta\equiv \exists x\,(Px \wedge Rx)$
91 $\alpha_1\equiv \forall x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$ $\alpha_2\equiv \forall x\,(Rx \rightarrow Px)$ $\beta\equiv \exists x\,(Rx \wedge \neg Qx)$
92 $\alpha_1\equiv \exists x\,(Px \wedge Qx)$ $\alpha_2\equiv \exists x\,(Qx \wedge \neg Rx)$ $\beta\equiv \exists x\,(Px \wedge \neg Rx)$
93 $\alpha_1\equiv \exists x\,(Px \wedge Qx)$ $\alpha_2\equiv \forall x\,(Px \rightarrow \neg Rx)$ $\beta\equiv \exists x\,(Rx \wedge \neg Qx)$
94 $\alpha_1\equiv \forall x\,(Sx \rightarrow Mx)$ $\alpha_2\equiv \neg Sa$ $\beta\equiv \neg Ma$
95 $\alpha_1\equiv \forall xyz\,(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$ $\alpha_2\equiv \forall x\exists y\,Rxy$
$\beta\equiv \forall xy\,(\exists z(Rxz \wedge Ryz) \rightarrow Rxy)$

Comprobar la falsedad de $\models \beta$ en los siguientes casos

96 $\beta\equiv \forall x\,Px \vee \forall x\,\neg Px$
97 $\beta\equiv \neg\,(\exists x Px \wedge \exists x \neg Px)$

98 $\beta \equiv \forall x \exists y\, Rxy \rightarrow \exists y \forall x\, Rxy$
99 $\beta \equiv \neg \exists x\, (Px \wedge Qx) \rightarrow (\exists x\, (Px \wedge \neg Qx) \vee \exists x\, (\neg Px \wedge Qx))$
100 $\beta \equiv \exists xyx\, (\neg x{\approx}y \wedge \neg x{\approx}z \wedge \neg y{\approx}z \wedge \forall t\, (t{\approx}x \vee t{\approx}y \vee t{\approx}z))$

Comprobar que los siguientes conjuntos $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ son conjuntos de fórmulas independientes entre sí.

101 $\alpha_1 \equiv \forall x\, Rxx$ $\alpha_2 \equiv \forall xy\, (Rxy \rightarrow Ryx)$ $\alpha_3 \equiv \forall xyz\, (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$
102 $\alpha_1 \equiv \forall xyz\, (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$ $\alpha_2 \equiv \forall xy\, (Rxy \wedge Ryx \rightarrow x{\approx}y)$
$\alpha_3 \equiv \forall xy(Ryx \vee Rxy)$
103 $\alpha_1 \equiv \exists y\, (y{\approx}a \wedge \forall x(Sx \wedge Gx \leftrightarrow x{\approx}y))$ $\alpha_2 \equiv \forall x\, (Sx \wedge \neg x{\approx}a \rightarrow Axa)$
$\alpha_3 \equiv \exists x\, (Sx \wedge Gx \wedge Abx)$ $\alpha_4 \equiv \forall xy\, (Axy \rightarrow \neg Ayx)$

Encontrar la forma prenexa de las siguientes fórmulas.

104 $\exists x\, (\forall y\, Rxy \rightarrow \neg \forall y Ryx)$
105 $\forall x\, (Px \rightarrow \exists y\, (Rxy \wedge \exists z\, (Ryz \wedge \neg Rxz)))$

Comprobar la invalidez de los siguientes argumentos.

106 Si los justos son respetados, entonces Coriolano será repudiado. Los magnánimos, y sólo ellos, son respetados. Todos los magnánimos son justos. Por tanto, Coriolano será repudiado.

107 Los colibríes tienen vivos colores. Ningún pájaro de gran tamaño se alimenta de miel. Los pájaros que no se alimentan de miel tienen colores apagados. Por tanto, hay colibríes de gran tamaño.

108 Ningún poema interesante es rechazado por gente culta. La mayoría de los poemas modernos son afectados. Todos los poemas de Coleridge son modernos. Todo poema afectado es rechazado por gente culta. Por tanto, algunos poemas de Coleridge no son interesantes.

109 Rosa ama a Luis. Pedro no simpatiza con Ana. Quien no simpatiza con Ana ama a Rosa. Si una persona ama a otra, la segunda ama a la primera. Por tanto, Pedro y Luis son la misma persona.

110 Los místicos se preocupan por el sentido de la existencia humana. Todo el que se pregunta "¿por qué hay algo antes que nada?" también se preocupa por el sentido de la existencia humana. Platón era místico. Aristocles se hizo la pregunta mencionada. Por tanto, Platón y Aristocles son el mismo.

111 Lancelot ama a la Reina Ginebra. Lancelot no ama a ninguno de sus amigos. El Rey Arturo es amigo de Lancelot. Los amigos de Lancelot son amigos de aquellos a quienes Lancelot ama. Por tanto, la reina Ginebra es amiga del Rey Arturo.

112 Toribio es amante de Clotilde. Roberto no simpatiza con Ana. Quien no simpatiza con Ana ama a Clotilde. Sólo una persona ama a Clotilde. Entonces Toribio y Roberto son la misma persona.

113 Sócrates es sofista y enseña gratuitamente. Sócrates argumenta mejor que cualquier otro sofista. Platón argumenta mejor que algún sofista que enseña gratuitamente. Si una persona argumenta mejor que otra, ésta no argumenta mejor que aquella. Por tanto, Platón no es sofista.

114 A Luisa le ama sólo un hombre. Luisa ama solamente a un hombre. Alguien que ama a Luisa es amado por ella. Alguien es amado por Rosa y Luisa. Juan ama a Luisa. Todo ello implica que Rosa ama a Juan.

115 Comprobar que las argumentaciones estudiadas en la parte de teoría de conjuntos que resultan inválidas según el análisis mediante diagramas también son inválidas según la semántica de L1.

CAPÍTULO 8

CÁLCULO DEDUCTIVO. DEDUCIBILIDAD

En este capítulo vamos a estudiar la noción "calculística" de *seguirse de* correspondiente a la lógica de primer orden. Las ideas básicas sobre qué es una regla de inferencia, qué es una derivación o deducción, y las nociones de *deducibilidad*, *teorematicidad* e *interdeducibilidad*, son exactamente las mismas qúe en lógica proposicional. Por ello, presentaremos las definiciones correspondientes sin apenas comentario. Los únicos cambios se deben a la mayor complejidad del lenguaje. Puesto que hemos extendido el lenguaje con signos lógicos nuevos para poder reconstruir la estructura interna de los enunciados simples, deberemos extender las reglas de inferencia con nuevas reglas primitivas (más las correspondientes derivadas) para dichos signos. Esa es *toda* la diferencia. Como enseguida veremos, ello puede implicar una gran complejidad adicional en las deducciones, pero no hay nada esencialmente nuevo en las ideas "calculísticas" generales. Así pues, vamos a ver punto por punto, con las correspondientes ampliaciones, lo mismo que vimos en L0.

1. Cálculo de deducción natural: reglas de inferencia primitivas

Recuérdese que un cálculo de deducción natural establece un conjunto de reglas que indican qué fórmulas se pueden escribir en función de qué otras se tengan disponibles con anterioridad, reglas de la forma "se puede escribir .... si antes se dispone de —". Debe haber reglas tales para cada uno de los signos lógicos del lenguaje. Ya vimos cuáles eran esas reglas para cada uno de los signos lógicos del lenguaje proposicional, las conectivas. Ahora debemos simplemente añadir a esas reglas otras para los signos lógicos adicionales del lenguaje de primer orden, esto es, para el cuantificador universal, el cuantificador existencial y el igualador. Comentaremos estas nuevas reglas y repetiremos sin comentario las primeras.

Doble Negación: DN

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \qquad \frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Reducción al absurdo: RA

$$\frac{\begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \beta \wedge \neg\beta \end{bmatrix}}{\neg\alpha}$$

Introducción del Conyuntor: IC

$$\frac{\begin{matrix} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{matrix}}{\alpha\wedge\beta}$$

Eliminación del Conyuntor: EC

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Introducción del Disyuntor: ID

$$\frac{\alpha}{\alpha\vee\beta} \qquad \frac{\alpha}{\beta\vee\alpha}$$

Eliminación del Disyuntor: ED

$$\frac{\begin{matrix} \alpha \vee \beta \\ \alpha \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \gamma \end{matrix}}{\gamma}$$

Introducción del Condicional: ICd

$$\frac{\begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}}{\alpha \rightarrow \beta}$$

Modus Ponens: MP

$$\frac{\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \end{matrix}}{\beta}$$

Introducción del Bicondicional: IB

$$\frac{\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

Eliminación del Bicondicional: EB

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha\leftrightarrow\beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

Las nuevas reglas para $\forall$, $\exists$ y $\approx$ son las siguientes, en las que se ha de interpretar las fórmulas de partida siempre como sentencias. Al escribirlas, para hacer más intuitiva la notación de los esquemas, utilizaremos, como ya hicimos en semántica, '$\alpha(\mathbf{t})$' para indicar que el término **t** (constante o variable) aparece en α; y utilizaremos además '$\alpha[\mathbf{c},\mathbf{x}]$' para denotar la sustitución de la constante **c** por la variable **x** en α. Aunque no veremos la definición de prueba hasta la próxima sección, ilustraremos estas reglas y algunas de sus restricciones con algunos ejemplos para facilitar la comprensión de las mismas (por otro lado, como se habrá adivinado, la noción de prueba será esencialmente la misma que en L0, con la que el lector ya está familiarizado).

Eliminación del Universal: EU

$\forall \mathbf{x}\ \alpha$

$\alpha\ [\mathbf{x}, \mathbf{c}]$ Para cualquier **c**

Lectura: si se tiene una fórmula (sentencia) cuantificada universalmente sobre una variable, se puede escribir la fórmula que le sigue cambiando en ella todas las ocurrencias de la variable cuantificada por una constante, cualquiera que ésta sea. La idea es simplemente que si tengo una afirmación universal entonces tengo también todas las afirmaciones particulares para todas las constantes.

Introducción del Universal: IU

$\alpha\ (\mathbf{c})$

$\forall \mathbf{x}\ \alpha[\mathbf{c},\mathbf{x}]$ Siempre que **c** no esté en las premisas ni en un supuesto anterior no cancelado

Lectura: si se tiene una fórmula (sentencia) con una constante, que no aparece en las premisas ni en un supuesto anterior todavía abierto, se puede sustituir la constante por una variable cualquiera y cuantificar universalmente (nótese que puesto que $\alpha(\mathbf{c})$ es una sentencia, ninguna variable puede aparecer libre en $\alpha(\mathbf{c})$). Quizás se pregunte el lector de dónde sale entonces **c**, si no es de las premisas o de un supuesto. Pues la respuesta es clara: de eliminar un universal anterior. Sólo en ese caso podemos "reintroducir" el universal. En los ejemplos veremos que el incumplimiento de esa restricción tendría consecuencias fatales.

EJEMPLO: Derivar $\forall x\ Px$ de $\forall x\ (Px \wedge Qx)$

1 $\forall x\ (Px \wedge Qx)$	Pr
2 $Pa \wedge Qa$	EU 1
3 Pa	EC 2
4 $\forall x\ Px$	IU 3

Como se observará, hemos respetado la condición de IU para pasar de 3 a 4, pues *a* no está ni en la premisa ni en supuestos abiertos. Veamos que si se incumpliesen estas condiciones obtendríamos derivaciones inaceptables. Podríamos, p.e., derivar $\forall x\ Px$ a partir de sólo *Pa*, esto es, del hecho de que una propiedad se dé para un individuo concreto podríamos concluir que se da en todos. O podríamos probar sin premisas cosas como $Pa \vee \neg Pb$, esto es, que cierta propiedad la ejemplifica un individuo específico o no la ejemplifica otro.

1 Pa	Pr
2 $\forall x\ Px$	IU 1 ☹ La constante sobre la que se universaliza está en la premisa.

1 ┌ Pb
2 │ $\forall x\, Px$ IU 1 ☹ La constante b está (antes del paso 4) en un supuesto abierto.
3 └ Pa EU 2
4 $Pb \rightarrow Pa$ I Cd 1 a 3
5 $\neg Pb \vee Pa$ DCD 4
6 $Pa \vee \neg Pb$ SD 4

Introducción del Existencial: IE

$\alpha(\mathbf{c})$

―――――

$\exists \mathbf{x}\ \alpha[\mathbf{c},\mathbf{x}]$ Siempre que la variable $\mathbf{x}$ no ocurra en $\alpha(\mathbf{c})$.

Lectura: si una fórmula (sentencia) contiene una constante cualquiera, se puede existencializar la fórmula sustituyendo la constante por una variable cualquiera. La idea es que si se dispone de una afirmación particular se dispone también una existencial: si disponemos de "a esto le pasa tal" disponemos también de "a algo le pasa tal".

EJEMPLO: Derivar $\exists x\ (Px \vee Qx)$ a partir de Pa

1 Pa Pr
2 $Pa \vee Qa$ ID 1
3 $\exists x\ (Px \vee Qx)$ IE 2

La restricción es esencial para bloquear derivaciones no deseadas:

1 Rab Pr
2 $\exists x\ Rax$ IE 1
3 $\exists x\ \exists x\ Rxx$ IE 2 ☹ La variable sobre la que aquí se existencializa ocurre en 2.

Otra manera de escribir esta regla con la restricción implícita es

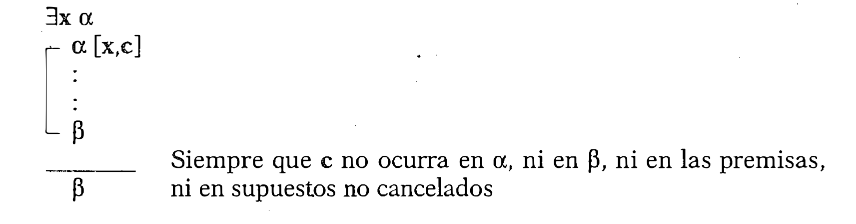
$\alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}]$

―――――

$\exists \mathbf{x}\ \alpha$

Nótese que esta formulación bloquea también la inferencia inaceptable pues $\exists x\ Rax$ no es la sustitución de x por a en $\exists x \exists x\ Rxx$; $\exists x \exists x\ Rxx\ [x,a]$ es la misma fórmula $\exists x \exists x\ Rxx$, pues x no tiene ninguna ocurrencia libre.

Eliminación del Existencial: EE



$\exists \mathbf{x}\ \alpha$
┌ $\alpha\ [\mathbf{x},\mathbf{c}]$
│ :
│ :
└ β

―――――

β Siempre que $\mathbf{c}$ no ocurra en α, ni en β, ni en las premisas, ni en supuestos no cancelados

Lectura: Si se tiene un existencial, y de la suposición de que la fórmula existencializada se cumple para un caso concreto *que no esté desempeñando ningún papel en la deducción* (ni ocurra en esa fórmula antes, ni en las premisas, ni en supuestos abiertos) se sigue otra fórmula β, que tampoco contiene ese caso, entonces puede cancelar el supuesto, barrar y escribir β. La idea es usar un *ejemplo* del existencial del que no se haya dicho nada antes, y si de ese ejemplo se sigue una fórmula que no contiene el ejemplo (e.e. que no depende de que el ejemplo sea *ese*), entonces podemos decir que esa fórmula se sigue del existencial.

EJEMPLO: Derivar $\exists x\, Qx$ a partir de $\exists x\, Px$ y $\forall x(Px \rightarrow Qx)$.

1	$\forall x\, (Px \rightarrow Qx)$	Pr
2	$\exists x\, Px$	Pr
3	┌ Pa	
4	│ $Pa \rightarrow Qa$	EU 1
5	│ Qa	MP 3,4
6	└ $\exists x\, Qx$	IE 5
7	$\exists x\, Qx$	EE 2 y 3 a 6

Como se ve, hemos respetado la condición de que "el ejemplo" *a* no esté ni en el existencial eliminado de la fila 2, ni en las premisas, ni en supuestos *anteriores* abiertos, ni en la fórmula β de 6. Estas restricciones son esenciales para bloquear derivaciones inadmisibles, como las siguientes:

1	Rab	Pr
2	$\exists x\, Rax$	IE
3	┌ Raa	
4	└ $\exists x\, Rxx$	IE 3
5	$\exists x\, Rxx$	EE 2 y 3 a 4 ☹ El ejemplo *a* aparece en la premisa.

1	$\exists x\, Px$	Pr
2	┌ Pa	
3	└ Pa	Rep 2
4	Pa	EE 1 y 2 a 3 ☹ El ejemplo *a* está en la fórmula β de 3.
5	$\forall x\, Px$	IU 4

1	$\exists xy\, Rxy$	Pr
2	┌ $\exists y\, Ray$	
3	│ ┌ Raa	
4	│ └ $\exists x\, Rxx$	IE 3
5	└ $\exists x\, Rxx$	EE 2 y 3 a 4 ☹ El ejemplo *a* está en el existencial de 2 que se elimina.
6	$\exists x\, Rxx$	EE 1 y 2 a 5

1 $\exists x\, Px$ Pr
2 $\exists x\, Qx$ Pr
3 ┌ Pa
4 │ ┌ Qa
5 │ │ $Pa \wedge Qa$ IC 3,4
6 │ └ $\exists x\, (Px \wedge Qx)$ IE 5
7 └ $\exists x\, (Px \wedge Qx)$ EE 2 y 4 a 6 ☹ El ejemplo a de 4 está en el supuesto todavía abierto 3.

8 $\exists x\, (Px \wedge Qx)$ EE 1 y 3 a 7

Reflexividad del igualador o Introducción de la Identidad: II

$$\frac{}{\mathbf{t} \approx \mathbf{t}}$$

Lectura: En cualquier momento se puede introducir como línea utilizable una igualdad flanqueada por el mismo término individual.

EJEMPLO: Derivar Pa a partir de $\forall x\, (x{\approx}a \rightarrow Px)$

1 $\forall x\, (x{\approx}a \rightarrow Px)$ Pr
2 $a{\approx}a \rightarrow Pa$ EU 1
3 $a{\approx}a$ II
4 Pa MP 2,3

Sustitución de la identidad: SI

$$\frac{\mathbf{c}_1 \approx \mathbf{c}_2 \quad \alpha(\mathbf{c}_1)}{\alpha\,[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]^*} \qquad \frac{\mathbf{c}_2 \approx \mathbf{c}_1 \quad \alpha(\mathbf{c}_1)}{\alpha\,[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]^*}$$

Lectura: Si se dispone de una igualdad entre constantes y de una fórmula que contiene una de las constantes, se puede sustituir por la otra en cualquiera de las ocurrencias de la constante. El signo '*' indica que no es necesario sustituir todas las ocurrencias.

EJEMPLO: Derivar $\forall x\, (x{\approx}a \rightarrow Px)$ a partir de Pa

1 Pa Pr
2 ┌ $b{\approx}a$
3 └ Pb SI 1 y 2
4 $b{\approx}a \rightarrow Pb$ ICd 2 a 3
5 $\forall x\, (x{\approx}a \rightarrow Px)$ IU 4

2. Cálculo de deducción natural: derivación y deducción

Las nociones de derivación y deducción son las mismas que en L0, salvo por la posibilidad de líneas que no usan otras anteriores por la regla de introducción de la identidad.

Derivación

DEF Una *derivación* es una secuencia en la que se puede introducir una fórmula en una línea si y sólo si:
(i) es una premisa, en cuyo caso se indica poniendo 'Pr' a su derecha;
(ii) es una línea utilizable anterior, en cuyo caso se pone 'Rep *n*' a su derecha, siendo *n* el número de la línea utilizable anterior donde está la fórmula;
(iii) hay una regla de inferencia que lo permite a partir de líneas anteriores, en cuyo caso se indica poniendo a su derecha el nombre de la regla y, cuando la regla usa líneas anteriores (todas salvo II), los números correspondientes a las mismas;
(iv) es una suposición, en cuyo caso se debe indicar poniendo la marca '-' a su izquierda.
Son *líneas utilizables* todas y sólo las no barradas.

Deducción

DEF Una *deducción* de β a partir de una serie (posiblemente vacía) α_1, ..., α_n es una derivación tal que:
(i) α_1, ..., α_n son las premisas;
(ii) β es una línea utilizable;
(iii) no hay ningún supuesto no cancelado.

En realidad, como se advirtió, ya hemos hecho uso de estas nociones en la sección anterior al ejemplificar las nuevas reglas del cálculo. Esperaremos a presentar las reglas derivadas para familiarizarnos con el cálculo y sus estrategias mediante ejemplos de deducibilidad, teorematicidad y interdeducibilidad. Aquí, por el momento, nos limitaremos a ilustrar con dos ejemplos sencillos (para casos más complejos esperaremos a disponer de las reglas derivadas) las estrategias para obtener por el método directo sentencias universales condicionales y sentencias existenciales (para la derivación por reducción al absurdo será mejor también esperar a disponer de las reglas derivadas).

Derivación de sentencias universales condicionales del tipo $\forall \mathbf{x}(\alpha(\mathbf{x})\rightarrow\beta(\mathbf{x}))$

Para obtener un universal por el método directo necesitamos tener la fórmula que le sigue pero conteniendo una constante (que no esté en

premisas ni en supuestos abiertos) en lugar de la variable, e.e. $\alpha(\mathbf{c})\rightarrow\beta(\mathbf{c})$ (cumpliendo $\mathbf{c}$ las restricciones indicadas). Por otro lado, para obtener un condicional (por el método directo) debemos suponer su antecedente e intentar llegar al consecuente. Así, combinando estas dos indicaciones, para obtener $\forall\mathbf{x}\ (\alpha(\mathbf{x})\rightarrow\beta(\mathbf{x}))$ comenzaremos suponiendo $\alpha(\mathbf{c})$ (utilizando una constante $\mathbf{c}$ nueva para garantizar que cumplimos las restricciones) e intentaremos llegar a $\beta(\mathbf{c})$; si lo logramos, podemos introducir el condicional y después generalizar.

EJEMPLO: Deducir $\forall x\ (Px \rightarrow Rx)$ a partir de $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ y $\forall x\ (Qx \rightarrow Rx)$

1	$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$	Pr
2	$\forall x\ (Qx \rightarrow Rx)$	Pr
3	┌ Pa	
4	│ $Pa \rightarrow Qa$	EU 1
5	│ Qa	MP 3,4
6	│ $Qa \rightarrow Ra$	EU 2
7	└ Ra	MP 5,6
8	$Pa \rightarrow Ra$	ICd 3 a 7
9	$\forall x\ (Px \rightarrow Rx)$	IU 8

DERIVACIÓN DE SENTENCIAS EXISTENCIALES

Si se dispone de sentencias particulares que dan lugar a la sentencia existencial buscada, entonces es inmediato (p.e. derivar $\exists x(Px \wedge Qx)$ a partir de Pa y Qa). Pero casi nunca es tan inmediato. Lo normal es que debamos obtener sentencias existenciales a partir de otras también existenciales (y quizás otras más). En ese caso, tras suponer "un caso" (nuevo, para cumplir las restricciones) del existencial de que ya se dispone (línea 9 del ejemplo), se intentará obtener el existencial buscado y después, por EE, "sacarlo fuera" del supuesto.

EJEMPLO: Deducir $\exists x\ (Px \wedge Rx)$ a partir de $\exists x\ (Px \wedge Qx)$ y $\forall x\ (Qx \rightarrow Rx)$.

1	$\exists x\ (Px \wedge Qx)$	Pr
2	$\forall x\ (Qx \rightarrow Rx)$	Pr
3	┌ $Pa \wedge Qa$	
4	│ Qa	EC 3
5	│ $Qa \rightarrow Ra$	EU 2
6	│ Ra	MP 4,5
7	│ Pa	EC 3
8	│ $Pa \wedge Ra$	IC 6,7
9	└ $\exists x\ (Px \wedge Rx)$	IE 8
10	$\exists x\ (Px \wedge Rx)$	EE 1 y 3 a 9

3. Reglas de inferencia derivadas

En L0 vimos que se pueden abreviar subderivaciones mediante reglas derivadas de inferencia. Estas reglas permiten hacer "directamente" lo que sin ellas ocuparía varios pasos en la deducción. Pero, recuérdese, lo fundamental es que sin ellas se obtendría exactamente lo mismo, sólo que con deducciones más largas. Vamos a reproducir aquí las reglas derivadas para las conectivas y a introducir otras nuevas para los signos nuevos, e.e. los cuantificadores y el igualador.

SC

$$\frac{\alpha\wedge\beta}{\beta\wedge\alpha}$$

SD

$$\frac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}$$

SD

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \leftrightarrow \alpha}$$

EDN

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\vee\beta\\ \neg\alpha\end{array}}{\beta} \qquad \frac{\begin{array}{c}\alpha\vee\beta\\ \neg\beta\end{array}}{\alpha}$$

MT

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\to\beta\\ \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

DCD

$$\frac{\alpha\to\beta}{\neg\alpha\vee\beta} \qquad \frac{\neg\alpha\vee\beta}{\alpha\to\beta}$$

NCD

$$\frac{\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\alpha\vee\neg\beta} \qquad \frac{\neg\alpha\vee\neg\beta}{\neg(\alpha\wedge\beta)}$$

NDC

$$\frac{\neg(\alpha\vee\beta)}{\neg\alpha\wedge\neg\beta} \qquad \frac{\neg\alpha\wedge\neg\beta}{\neg(\alpha\vee\beta)}$$

NCoC

$$\frac{\neg(\alpha\to\beta}{\alpha\wedge\neg\beta} \qquad \frac{\alpha\wedge\neg\beta}{\neg(\alpha\to\beta)}$$

Eliminación del Universal Generalizada: EUG

$$\frac{\forall x_1 \ldots x_n\ \alpha(x_1 \ldots x_n)}{\alpha\ (\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_n)}$$

Para cualesquiera $\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_n$.

Introducción del Existencial Generalizada: IEG

$$\frac{\alpha\ (\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_n)}{\exists x_1 \ldots x_n\ \alpha(x_1 \ldots x_n)}$$

Siempre que $x_1 \ldots x_n$ no estén en $\alpha\ (\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_n)$.

Negación del Universal al Existencial: NUE

$$\frac{\neg\forall x\ \alpha}{\exists x\ \neg\alpha} \qquad \frac{\exists x\ \neg\alpha}{\neg\forall x\ \alpha}$$

Negación del Existencial al Universal: NEU

$$\frac{\neg\exists x\ \alpha}{\forall x\ \neg\alpha} \qquad \frac{\forall x\ \neg\alpha}{\neg\exists x\ \alpha}$$

Definición del Universal por el Existencial: DUE

$$\frac{\forall x\ \alpha}{\neg\exists x\ \neg\alpha} \qquad \frac{\neg\exists x\ \neg\alpha}{\forall x\ \alpha}$$

Definición del Existencial por el universal: DEU

$$\frac{\exists x\ \alpha}{\neg\forall x\ \neg\alpha} \qquad \frac{\neg\forall x\ \neg\alpha}{\exists x\ \alpha}$$

Simetría de la Identidad: SiI

$$\frac{t_1 \approx t_2}{t_2 \approx t_1}$$

Transitividad de la Identidad: TI

$$\frac{\begin{array}{l} t_1 \approx t_2 \\ t_2 \approx t_3 \end{array}}{t_1 \approx t_3}$$

Introducción Existencia Unívoca: IEU

$$\frac{\begin{array}{l} \exists x\ \alpha(x) \\ \forall xy\ (\ (\alpha(x) \wedge \alpha(y)) \rightarrow x \approx y) \end{array}}{\exists x \forall y\ (\alpha(y) \leftrightarrow y \approx x)}$$

Eliminación Existencia Unívoca: EEU

$$\frac{\exists x \forall y\,(\alpha(y) \leftrightarrow y \approx x)}{\exists x\, \alpha(x)} \qquad \frac{\exists x \forall y\,(\alpha(y) \leftrightarrow y \approx x)}{\forall xy\,(\,(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) \rightarrow x \approx y)}$$

Probaremos a continuación de tres de estas nuevas reglas que son efectivamente derivadas y las otras las puede intentar probar el lector cuando se haya familiarizado con las deducciones tras los ejercicios.

EJEMPLO: Derivar $\forall x \neg Px$ a partir de $\neg\exists x\, Px$

1	$\neg\exists x\, Px$	Pr
2	┌ Pa	
3	│ $\exists x\, Px$	IE 2
4	└ $\exists x\, Px \wedge \neg\exists x\, Px$	IC 1,3
5	$\neg Pa$	RA 2 a 4
6	$\forall x \neg Px$	IU 5

EJEMPLO: Derivar $b \approx a$ a partir de $a \approx b$

1	$a \approx b$	Pr
2	$a \approx a$	II
3	$b \approx a$	SI 1,2

EJEMPLO: Derivar $\neg\forall x \neg Px$ a partir de $\exists x\, Px$

1	$\exists x\, Px$	
2	┌ $\forall x \neg Px$	
3	│ ┌ Pa	
4	│ │ $\neg Pa$	EU 2
5	│ └ $Pa \wedge \neg Pa$	IC 3,4
6	└ $Pa \wedge \neg Pa$	EE 1 y 3 a 5
7	$\neg \forall x \neg Px$	RA 2 a 6

4. Deducibilidad, teorematicidad, interdeducibilidad: $\vdash$

Vamos a ver ahora por último, antes de pasar a ver la aplicación del cálculo al estudio de argumentos en lenguaje natural, la noción de *deducibilidad*, así como sus conceptos asociados de *teorematicidad* e *interdeducibilidad*. Recuérdese que estas son las nociones "calculísticas" análogas, respectivamente, a las nociones semánticas de *consecuencia lógica*, *verdad lógica* y *equivalencia lógica*. Las definiciones son exactamente igual que en L0, únicamente cambia el hecho de que el cálculo al que implícitamente refieren (a través de la noción de *deducción* que hemos definido en la sección anterior) es más complejo que el de L0. Nos familiarizaremos con este cálculo haciendo algunas deducciones para cada una de las tres nociones.

Por los mismos motivos que en L0, debe quedar claro de nuevo que en el cálculo no podemos determinar en general si una sentencia es o no deducible de otras, si una sentencia es o no un teorema, y si dos sentencias son

o no interdeducibles. Si encontramos las correspondientes derivaciones, la respuesta es afirmativa. Pero si no las encontramos, ello solo no quiere decir que la respuesta sea negativa, que no sean posibles las correspondientes derivaciones. Una cosa es que al intentar las derivaciones "veamos" que "no van a salir". Otra cosa es que ese convencimiento, incluso en los expertos en el cálculo, constituya una *demostración de que no hay* tal derivación. Como vimos en L0, no es ese el caso. Otra cuestión es si podemos mejorar esta situación, como en L0, apelando a la relación entre semántica y cálculo. Pero para eso debemos esperar al próximo capítulo. No volveremos a insistir en estos hechos, que deben considerarse implícitos en todo lo que sigue.

Deducibilidad

La noción de deducibilidad es la que expresa el sentido calculístico de *seguirse de*. La idea, como se recordará, es que una fórmula es deducible de otras si es posible derivar aquélla de éstas, esto es, si hay una deducción que tiene a éstas como premisas y a aquélla como línea utilizable.

DEF Una fórmula β es *deducible* de un conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de otras (y escribimos'$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$') syss_{def} existe una deducción de β a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

También aquí se obtiene como corolario que de premisas contradictorias se puede deducir cualquier cosa:

DEF Un conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es *inconsistente* syss_{def} existe β tal que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta \wedge \neg\beta$

COROLARIO: Si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es inconsistente, entonces para toda β: $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$.

La justificación de este hecho es exactamente la misma que en L0, pues recuérdese que se deriva de la presencia en nuestro cálculo de la regla de Reducción al Absurdo, de la que ya disponíamos en lógica proposicional.

Vamos a familiarizarnos a continuación con las reglas, tanto primitivas como derivadas, realizando algunas deducciones.

EJEMPLO: Comprobar $\{\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \forall x\,((Px \wedge Qx) \rightarrow Rx)\} \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Rx)$

1	$\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$	Pr
2	$\forall x\,((Px \wedge Qx) \rightarrow Rx)$	Pr
3	┌ Pa	
4	│ $Pa \rightarrow Qa$	EU 1
5	│ Qa	MP 3, 4
6	│ $(Pa \wedge Qa) \rightarrow Ra$	EU 2
7	│ $Pa \wedge Qa$	IC 3,5
8	└ Ra	MP 6, 7
9	$Pa \rightarrow Ra$	ICd 3 a 8
10	$\forall x\,(Px \rightarrow Rx)$	IU 9

EJEMPLO: Comprobar $\{\neg\exists x\,(Sx \wedge Rax), \forall x\,(Px \rightarrow Rax), \forall x\,(Dx \rightarrow Sx)\} \vdash \forall x\,(Px \rightarrow \neg Dx)$

1	$\neg\exists x\,(Sx \wedge Rax)$	Pr
2	$\forall x\,(Px \rightarrow Rax)$	Pr
3	$\forall x\,(Dx \rightarrow Sx)$	Pr
4	┌ Pb	
5	│ $Pb \rightarrow Rab$	EU 2
6	│ Rab	MP 4,5
7	│ $\forall x\,\neg(Sx \wedge Rax)$	NEU 1
8	│ $\neg(Sb \wedge Rab)$	EU 7
9	│ $\neg Sb \vee \neg Rab$	NCD 8
10	│ $\neg\neg Rab$	DN 6
11	│ $\neg Sb$	EDN 9,10
12	│ $Db \rightarrow Sb$	EU 3
13	└ $\neg Db$	MT 11, 12
14	$Pb \rightarrow \neg Db$	ICd 4 a 13
15	$\forall x\,(Px \rightarrow \neg Dx)$	IU 14

EJEMPLO: Comprobar $\{Pa, Qb, a \approx b\} \vdash \exists x\,(Px \wedge Qx)$

1	Pa	Pr
2	Qb	Pr
3	$a \approx b$	Pr
4	Qa	SI 2, 3
5	$Pa \wedge Qa$	IC 1,4
6	$\exists x\,(Px \wedge Qx)$	IE 5

EJEMPLO: Comprobar $\{\exists x\,(Rxa \vee Sxb), \forall x\,(Sxb \rightarrow \neg Dx), \forall x\,Dx\} \vdash \exists x\,Rxa$

1	$\exists x\,(Rxa \vee Sxb)$	Pr
2	$\forall x\,(Sxb \rightarrow \neg Dx)$	Pr
3	$\forall x\,Dx$	Pr
4	┌ $Rca \vee Scb$	
5	│ $Scb \rightarrow \neg Dc$	EU 2
6	│ Dc	EU 3
7	│ $\neg\neg Dc$	DN 6
8	│ $\neg Scb$	MT 5, 7
9	│ Rca	EDN 4,8
10	└ $\exists x\,Rxa$	IE 9
11	$\exists x\,Rxa$	EE 1 y 4 a 10

EJEMPLO: Comprobar $\{ \forall x\, (Fx \rightarrow Pxa), \forall x\, (Pxa \rightarrow Lx), Fb, \neg Lc \} \vdash \neg b{\approx}c$

1	$\forall x\, (Fx \rightarrow Pxa)$	Pr
2	$\forall x\, (Pxa \rightarrow Lx)$	Pr
3	Fb	Pr
4	$\neg Lc$	Pr
5	$\quad b{\approx}c$	
6	$\quad Fb \rightarrow Pba$	EU 1
7	$\quad Pba$	MP 3, 6
8	$\quad Pba \rightarrow Lb$	EU 2
9	$\quad Lb$	MP 7,8
10	$\quad Lc$	SI 5, 9
11	$\quad Lc \wedge \neg Lc$	IC 4, 10
12	$\neg b{\approx}c$	RA 5 a 11

EJEMPLO: Comprobar $\{\forall xy\, (Rxy \rightarrow Ryx)\, , \forall xyz\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x\, \exists y\, Rxy \} \vdash \forall x\, Rxx$

1	$\forall xy\, (Rxy \rightarrow Ryx)$	Pr
2	$\forall xyz\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	Pr
3	$\forall x\, \exists y\, Rxy$	Pr
4	$\exists y\, Ray$	EU 3
5	$\quad Rab$	
6	$\quad Rab \rightarrow Rba$	EUG 1
7	$\quad Rba$	MP 5,6
8	$\quad (Rab \wedge Rba) \rightarrow Raa$	EUG 2
9	$\quad Rab \wedge Rba$	IC 5,7
10	$\quad Raa$	MP 8,9
11	$\quad \forall x\, Rxx$	IU 10
12	$\forall x\, Rxx$	EE 4 y 5 a 11

TEOREMATICIDAD

La noción de *teorema lógico* del cálculo de primer orden es exactamente la misma que la de la parte proposicional, esto es, una fórmula es un teorema lógico si puede establecerse independientemente de cualquier supuesto, deducirse sin premisas.

DEF: Una fórmula β es un *teorema lógico* (y escribimos '$\vdash \beta$') syss$_{\text{def}}$ $\varnothing \vdash \beta$

Los siguientes son algunos (esquemas de) teoremas lógicos destacados (el lector notará de nuevo que también eran verdades lógicas):

(1) $\vdash \neg\exists \mathbf{x}\, (\alpha \wedge \neg\alpha)$
(2) $\vdash \forall \mathbf{x}\, (\alpha \vee \neg\alpha)$
(3) $\vdash \forall \mathbf{x}\, (\alpha \rightarrow \alpha)$
(4) $\vdash \forall \mathbf{x}\, (\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha)$
(5) $\vdash \forall \mathbf{x}\, \alpha \rightarrow \alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}]$
(6) $\vdash \alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}] \rightarrow \exists \mathbf{x}\, \alpha$

(7) $\vdash \forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \to (\forall \mathbf{x}\ \alpha \to \forall \mathbf{x}\ \beta)$
(8) $\vdash (\forall \mathbf{x}\ \alpha \vee \forall \mathbf{x}\ \beta) \to \forall \mathbf{x}\ (\alpha \vee \beta)$
(9) $\vdash \exists \mathbf{x}\ (\alpha \wedge \beta) \to (\exists \mathbf{x}\ \alpha \wedge \exists \mathbf{x}\ \beta)$
(10) $\vdash \forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \to (\exists \mathbf{x}\ \alpha \to \exists \mathbf{x}\ \beta)$
(11) $\vdash \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y}\ \alpha \to \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x}\ \alpha$
(12) $\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} \approx \mathbf{x}$
(13) $\vdash \forall \mathbf{xy}\ (\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \to \mathbf{y} \approx \mathbf{x})$
(14) $\vdash \forall \mathbf{xyz}\ (\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \approx \mathbf{z} \to \mathbf{x} \approx \mathbf{z})$

Muchos de ellos son de prueba casi inmediata a partir de reglas primitivas o derivadas. Probaremos para practicar el cálculo (casos concretos de) algunos cuya prueba no es tan inmediata (el lector debe intentar hacer los restantes).

EJEMPLO: Comprobar $\vdash (\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx) \to \forall x\ (Px \vee Qx)$

1	$\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx$	
2	$\forall x\ Px$	
3	Pa	EU 2
4	$Pa \vee Qa$	ID 3
5	$\forall x\ (Px \vee Qx)$	IU 4
6	$\forall x\ Px \to \forall x\ (Px \vee Qx)$	ICd 2 a 5
7	$\forall x\ Qx$	
8	Qa	EU 7
9	$Pa \vee Qa$	ID 8
10	$\forall x\ (Px \vee Qx)$	IU 9
11	$\forall x\ Qx \to \forall x\ (Px \vee Qx)$	ICd 7 a 10
12	$\forall x\ (Px \vee Qx)$	ED 1, 6, 11
13	$(\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx) \to \forall x\ (Px \vee Qx)$	ICd 1 a 12

EJEMPLO: Comprobar $\vdash \forall x\ (Px \to Qx) \to (\exists x\ Px \to \exists x\ Qx)$

1	$\forall x\ (Px \to Qx)$	
2	$\exists x\ Px$	
3	Pa	
4	$Pa \to Qa$	EU 1
5	Qa	MP 3,4
6	$\exists x\ Qx$	IE 5
7	$\exists x\ Qx$	EE 2 y 3 a 6
8	$\exists x\ Px \to \exists x\ Qx$	ICd 2 a 7
9	$\forall x\ (Px \to Qx) \to (\exists x\ Px \to \exists x\ Qx)$	ICd 1 a 8

EJEMPLO: Comprobar $\vdash \exists x \forall y\ Rxy \to \forall y \exists x\ Rxy$

1	$\exists x \forall y\ Rxy$	
2	$\forall y\ Ray$	
3	Rab	EU 2
4	$\exists x\ Rxb$	IE 3
5	$\forall y\ \exists x\ Rxy$	IU 4
6	$\forall y\ \exists x\ Rxy$	EE 1 y 2 a 5
7	$\exists x \forall y\ Rxy \to \forall y \exists x\ Rxy$	ICd 1 a 6

Con la noción de teorema lógico podemos presentar ahora en L1 el hecho complementario al hecho consistente en que de premisas inconsistentes se deduce cualquier cosa, a saber, que los teoremas lógicos se deducen de cualesquiera premisas. La justificación es exactamente la misma que dimos en L0.

COROLARIO: Si $\vdash \beta$ entonces para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$.

INTERDEDUCIBILIDAD

La última noción de esta familia es la de *interdeducibilidad*, que recordemos recoge el sentido calculístico de *decir lo mismo*:

DEF Dos fórmulas α y β son *interdeducibles* (y escribimos '$\alpha \dashv\vdash \beta$') syss$_{\text{def}}$ $\{\alpha\} \vdash \beta$ y $\{\beta\} \vdash \alpha$.

Los siguientes son algunos pares de (esquemas de) fórmulas interdeducibles especialmente destacadas (el lector notará de nuevo que eran también equivalencias lógicas).

(15) $\forall \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\alpha$
(16) $\exists \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \neg\forall \mathbf{x}\ \neg\alpha$
(17) $\neg\forall \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \exists \mathbf{x}\ \neg\alpha$
(18) $\neg\exists \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ \neg\alpha$
(19) $\forall \mathbf{x}\ (\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ \alpha \wedge \forall \mathbf{x}\ \beta$
(20) $\exists \mathbf{x}\ (\alpha \vee \beta) \dashv\vdash \exists \mathbf{x}\ \alpha \vee \exists \mathbf{x}\ \beta$
(21) $\forall \mathbf{xy}\ \alpha \dashv\vdash \forall \mathbf{yx}\ \alpha$
(22) $\exists \mathbf{xy}\ \alpha \dashv\vdash \exists \mathbf{yx}\ \alpha$
(23) $\forall \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \forall \mathbf{y}\ \alpha[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ (si **y** no aparece en α)
(24) $\exists \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \exists \mathbf{y}\ \alpha[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ (si **y** no aparece en α)
(25) $\forall \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \alpha$ (si **x** no está libre en α)
(26) $\exists \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \alpha$ (si **x** no está libre en α)
(27) $\forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \dashv\vdash \alpha \to \forall \mathbf{x}\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(28) $\forall \mathbf{x}\ (\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash \alpha \wedge \forall \mathbf{x}\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(29) $\forall \mathbf{x}\ (\alpha \vee \beta) \dashv\vdash \alpha \vee \forall \mathbf{x}\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(30) $\exists \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \dashv\vdash \alpha \to \exists \mathbf{x}\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(31) $\exists \mathbf{x}\ (\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash \alpha \wedge \exists \mathbf{x}\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(32) $\exists \mathbf{x}\ (\alpha \vee \beta) \dashv\vdash \alpha \vee \exists \mathbf{x}\ \beta$ (si **x** no está libre en α)
(33) $\forall \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists \mathbf{x}\ \alpha \to \beta$ (si **x** no está libre en β)
(34) $\exists \mathbf{x}\ (\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ \alpha \to \beta$ (si **x** no está libre en β)
(35) $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \to \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ (\neg\mathbf{Qx} \to \neg\mathbf{Px})$
(36) $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Qx} \wedge \mathbf{Px})$
(37) $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \vee \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Qx} \vee \mathbf{Px})$
(38) $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \leftrightarrow \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Qx} \leftrightarrow \mathbf{Px})$
(39) $\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Qx} \wedge \mathbf{Px})$
(40) $\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \vee \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Qx} \vee \mathbf{Px})$
(41) $\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \leftrightarrow \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Qx} \leftrightarrow \mathbf{Px})$
(42) $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \to \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \neg\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \neg\mathbf{Qx})$

(43) $\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{Px} \to \neg \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \neg \exists \mathbf{x}\, (\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Qx})$
(44) $\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \neg \forall \mathbf{x}\, (\mathbf{Px} \to \neg \mathbf{Qx})$
(45) $\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{Px} \wedge \neg \mathbf{Qx}) \dashv\vdash \neg \forall \mathbf{x}\, (\mathbf{Px} \to \mathbf{Qx})$

EJEMPLO: Comprobar $\forall x\, (Px \wedge Qx) \dashv\vdash \forall x\, Px \wedge \forall x\, Qx$

1	$\forall x\, (Px \wedge Qx)$	Pr
2	$Pa \wedge Qa$	EU 1
3	Pa	EC 2
4	$\forall x\, Px$	IU 3
5	Qa	EC 2
6	$\forall x\, Qx$	IU 5
7	$\forall x\, Px \wedge \forall x Qx$	IC 4,5

1	$\forall x\, Px \wedge \forall x Qx$	Pr
2	$\forall x\, Px$	EC 1
3	Pa	EU 2
4	$\forall x\, Qx$	EC 1
5	Qa	EU 4
6	$Pa \wedge Qa$	IC 3,5
7	$\forall x\, (Px \wedge Qx)$	IU 6

EJEMPLO: Comprobar $\exists x\, (Px \to Qa) \dashv\vdash \forall x\, Px \to Qa$

1	$\exists x\, (Px \to Qa)$	Pr
2	┌ $\forall x\, Px$	
3	│ ┌ $Pb \to Qa$	
4	│ │ Pb	EU 2
5	│ └ Qa	MP 3,4
6	└ Qa	EE 1 y 3 a 5
7	$\forall x\, Px \to Qa$	ICd 2 a 6

1	$\forall x\, Px \to Qa$	Pr
2	┌ $\neg \exists x\, (Px \to Qa)$	
3	│ $\forall x\, \neg (Px \to Qa)$	NEU 2
4	│ $\neg (Pb \to Qa)$	EU 3
5	│ $Pb \wedge \neg Qa$	NCC 4
6	│ Pb	EC 5
7	│ $\forall x\, Px$	IU 7
8	│ Qa	MP 1,7
9	│ $\neg Qa$	EC 5
10	└ $Qa \wedge \neg Qa$	IC 8,9
11	$\neg \neg \exists x\, (Px \to Qa)$	RA 2 a 10
12	$\exists x\, (Px \to Qa)$	DN 11

En L1 son ciertos de la interdeducibilidad los mismos hechos que vimos en su momento en L0, y que son los análogos a los que hemos visto ya para la equivalencia lógica en L1, a saber, que se trata de una relación de equivalencia (e.e. reflexiva, simétrica y transitiva) y que satisface un principio de sustitutividad para subfórmulas interdeducibles:

COROLARIO: Para toda α: $\alpha \dashv\vdash \alpha$
Para toda α, β: Si $\alpha \dashv\vdash \beta$ entonces $\beta \dashv\vdash \alpha$
Para toda α, β, γ: Si $\alpha \dashv\vdash \beta$ y $\beta \dashv\vdash \gamma$ entonces $\alpha \dashv\vdash \gamma$

COROLARIO: Para toda α, β, γ, δ: si β es una subfórmula de α, $\beta \dashv\vdash \gamma$ y δ es el resultado de sustituir β por γ en α, entonces $\delta \dashv\vdash \alpha$.

Concluiremos esta sección recordando las relaciones entre estas tres nociones, que presentamos sin comentario pues se justifican por elementos del cálculo de los que ya disponíamos en el cálculo proposicional.

(a) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$ syss $\vdash \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.

(b) $\alpha \dashv\vdash \beta$ syss $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

(c) $\alpha \dashv\vdash \beta$ syss $\{\alpha\} \vdash \beta$ y $\{\beta\} \vdash \alpha$

EJERCICIOS: 116 a 160.

5. Interdefinibilidad de cuantificadores

En la sec. 4 del cap. 7 hemos visto el sentido semántico en que se podían definir los cuantificadores universal y existencial entre sí: cada fórmula que contiene uno de los cuantificadores es lógicamente equivalente a otra que no lo contiene. Y vimos también que se podrían haber introducido otros cuantificadores como 'ningún', '@lgún', 'hay al menos tres', 'hay como máximo cuatro', 'hay dos', etc., pero que no era necesario porque se podían "definir" a partir del universal y el existencial (o de sólo uno de ellos y de la negación) en el sentido indicado: toda fórmula que contuviese alguno de esos nuevos cuantificadores sería lógicamente equivalente a otra que no los tuviera. Pues bien, algo semejante se puede decir aquí, pero utilizando la interdeducibilidad en lugar de la equivalencia lógica.

Así, por lo que se refiere a la interdefinibilidad de los cuantificadores universal y existencial, ahora en el cálculo eso significa que toda fórmula con el universal es interdeducible con otra que no lo tiene, y viceversa. Para probar eso basta probar los siguientes hechos:

$\forall \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \neg\exists \mathbf{x} \neg\alpha$
$\exists \mathbf{x}\ \alpha \dashv\vdash \neg\forall \mathbf{x}\ \neg\alpha$

Pero estos hechos se prueban inmediatamente a partir de las reglas de inferencia derivadas, pues corresponden directamente a dos de dichas reglas: la regla de Definición del Universal por el Existencial (DUE) y la de Definición del Existencial por el Universal (DEU). Probar la interdeducibilidad entre estos dos cuantificadores es precisamente probar que estas reglas son derivadas, esto es, que se pueden obtener estas deducciones sin usar dichas reglas. Cuando las presentamos ya probamos un sentido de DEU, probaremos ahora el otro y dejamos la prueba de DUE al lector.

EJEMPLO: Derivar $\exists x\ Px$ a partir de $\neg\forall x \neg Px$

1 $\neg\forall x\ \neg Px$
2 ┌ $\neg\exists x\ Px$
3 │ ┌ Pa
4 │ │ $\exists x\ Px$ IE 3
5 │ └ $\exists x\ Px \wedge \neg\exists x\ Px$ IC 2, 4
6 │ $\neg Pa$ RA 3 a 5
7 │ $\forall x\ \neg Px$ IU 6
8 └ $\forall x\ \neg Px \wedge \neg\forall x\ \neg Px$ IC 1,7
9 $\neg\neg\ \exists x\ Px$ RA 2 a 8
10 $\exists x\ Px$ DN 9

Así pues, hay fórmulas interdeducibles con otras que no contienen uno de los cuantificadores. Esto es estrictamente análogo a lo que vimos en semántica. Ahora bien, el sentido en el que esto implica que un cuantificador es *definible* o *eliminable* en favor del otro es, como en L0 ocurría con las conectivas, un poco distinto. No se trata de que esas *interdefinibilidades* hagan eliminables por sí mismas a uno de los cuantificadores, pues, como se ha visto, en la prueba de interdefinibilidad se usa la el cuantificador que estamos "definiendo" junto con las reglas que la gobiernan. Lo que muestra la interdefinibilidad es que podemos eliminar un cuantificador *y sus reglas de inferencia* a partir del otro en el siguiente sentido: las reglas de inferencia primitivas que gobiernan ese cuantificador se convertirían en reglas derivadas si utilizáramos la fórmula interdeducible como abreviatura/definición. Ilustraremos este sentido obteniendo como regla derivada la que ahora es regla primitiva de introducción del existencia (IE) a partir de las reglas para el universal y de la siguiente "definición":

$\exists \mathbf{x}\ \alpha \equiv \neg\forall \mathbf{x}\ \neg\alpha$

Recuérdese que IE es la regla:

$$\frac{\alpha(\mathbf{c})}{\exists \mathbf{x}\ \alpha[\mathbf{c},\mathbf{x}]}$$

1 Pa Pr
2 ┌ $\forall x\ \neg Px$
3 │ $\neg Pa$ EU 2
4 └ $Pa \wedge \neg Pa$ IC 1,3
5 $\neg\forall x\ \neg Px$ RA 2 a 5

Así pues, a partir de Pa hemos demostrado $\neg\forall x\ \neg Px$, que por la definición indicada equivale a $\exists x\ Px$. Por tanto (en cuanto hiciésemos lo propio con la otra regla primitiva del existencial), con el universal y sus reglas, más dicha definición, podríamos hacer las inferencias que ahora hacemos de modo primitivo con el existencial y sus reglas. Este es el sentido en que la interdeducibilidad de los cuantificadores muestra que son "eliminables" también en el cálculo.

Algo exactamente análogo obtendríamos si hubiésemos introducido otros cuantificadores primitivos que fuesen definibles mediante ∀ y ∃, como 'ningún', '@lgún' o los cuantificadores numéricos. De hecho, tenemos ya reglas derivadas que muestran eso respecto del cuantificador numérico 'hay exactamente un ...', a saber, las reglas de introducción y eliminación de la existencia unívoca (IEU y EEU). En efecto, si introdujésemos como nuevo cuantificador primitivo ∃1 e introdujésemos las correspondientes nuevas reglas primitivas para él, entonces usando la definición

$$\exists 1x\, \alpha(x) \equiv \exists x \forall y\, (\alpha(y) \leftrightarrow y \approx x)$$

podríamos probar (usando IEU y EEU) que el nuevo cuantificador es eliminable mediante ∀ y ∃ en el mismo sentido en que hemos visto que ∃ es eliminable mediante ∀. Y análogamente para el resto de eventuales nuevos cuantificadores primitivos definibles mediante ∀ y ∃.

6. Prueba deductiva de la validez de un argumento

Por lo que hemos advertido al comienzo de este capítulo, debe estar claro que tampoco mediante el cálculo de primer orden podemos "determinar" si un argumento es válido. Lo único que podemos hacer, como en L0, es probar, de un argumento válido, que lo es, y lo haremos encontrando una deducción que parta de las premisas y obtenga la conclusión. Recordemos que lo único que precisamos aquí es combinar dos cosas que ya sabemos:

(a) identificar y formalizar las premisas y la conclusión;
(b) derivar en el cálculo la conclusión de las premisas.

EJEMPLO: "Sócrates es filósofo. Los filósofos aman la sabiduría. Nadie que ame la sabiduría prefiere el poder a la verdad. Por tanto, Sócrates no prefiere el poder a la verdad."

Signos primitivos:
$a \equiv$ Sócrates
$F \equiv$ ser filósofo
$A \equiv$ amar la sabiduría
$P \equiv$ preferir
$b \equiv$ la verdad
$c \equiv$ el poder
(Otra opción podría ser separar el relator monario 'ser amante de la sabiduría' en el relator binario 'amar a' y la constante individual 'la sabiduría'.)

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv Fa$
$\alpha_2 \equiv \forall x\, (Fx \rightarrow Ax)$
$\alpha_3 \equiv \forall x\, (Ax \rightarrow \neg Pxcb)$
$\beta \equiv \neg\, Pacb$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \vdash \beta$.

1	Fa	Pr
2	$\forall x\, (Fx \rightarrow Ax)$	Pr
3	$\forall x\, (Ax \rightarrow \neg Pxcb)$	Pr
4	$Fa \rightarrow Aa$	EU 2
5	Aa	MP 1,4
6	$Aa \rightarrow \neg Pacb$	EU 3
7	$\neg Pacb$	MP 5,6

EJEMPLO: "Ningún existencialista aprecia a ningún positivista. Los miembros del Círculo de Viena son positivistas. Ningún existencialista aprecia a ningún miembro del Círculo de Viena"

Signos primitivos:
$E \equiv$ ser existencialista
$P \equiv$ ser positivista
$M \equiv$ ser miembro del Círculo de Viena
$A \equiv$ apreciar a

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv \forall xy\, (\, (Ex \wedge Py) \rightarrow \neg Axy)$
$\alpha_2 \equiv \forall x\, (Mx \rightarrow Px)$
$\beta \equiv \forall xy\, (\, (Ex \wedge My) \rightarrow \neg Axy)$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash \beta$.

1	$\forall xy\, (\, (Ex \wedge Py) \rightarrow \neg Axy)$	Pr
2	$\forall x\, (Mx \rightarrow Px)$	Pr
3	$Ea \wedge Mb$	
4	$(Ea \wedge Pb) \rightarrow \neg Aab$	EUG 1
5	Mb	EC 3
6	$Mb \rightarrow Pb$	EU 2
7	Pb	MP 5,6
8	Ea	EC 3
9	$Ea \wedge Pb$	IC 7,8
10	$\neg Aab$	MP 4,9
11	$(Ea \wedge Mb) \rightarrow \neg Aab$	ICd 3 a 10
12	$\forall y\, (\, (Ea \wedge My) \rightarrow \neg Aay)$	IU 11
13	$\forall xy\, (\, (Ex \wedge My) \rightarrow \neg Axy)$	IU 12

EJEMPLO: "Platón admira a algún sofista que enseña gratuitamente. Sócrates es sofista y enseña gratuitamente. Hay como máximo un sofista que enseña gratuitamente. Siempre que uno admira a otro éste admira a aquél. Por tanto, Sócrates admira a Platón."

Signos primitivos:
$a \equiv$ Platón
$b \equiv$ Sócrates
$S \equiv$ ser sofista
$E \equiv$ enseñar gratuitamente
$A \equiv$ admirar a

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv \exists x\ (Sx \wedge Ex \wedge Aax)$
$\alpha_2 \equiv Sb \wedge Eb$
$\alpha_3 \equiv \forall xy\ (\ (Sx \wedge Ex \wedge Sy \wedge Ey) \rightarrow x \approx y)$
$\alpha_4 \equiv \forall xy\ (Axy \rightarrow Ayx)$
$\beta \equiv Aba$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vdash \beta$

1	$\exists x\ (Sx \wedge Ex \wedge Aax)$	Pr
2	$Sb \wedge Eb$	Pr
3	$\forall xy\ (\ (Sx \wedge Ex \wedge Sy \wedge Ey) \rightarrow x \approx y)$	Pr
4	$\forall xy\ (Axy \rightarrow Ayx)$	Pr
5	┌ $Sc \wedge Ec \wedge Aac$	
6	│ $Sc \wedge Ec$	EC 5
7	│ $Sb \wedge Eb \wedge Sc \wedge Ec$	IC 2,3
8	│ $Sb \wedge Eb \wedge Sc \wedge Ec \rightarrow b \approx c$	EUG 3
9	│ $b \approx c$	MP 7,8
10	│ Aac	EC 5
11	└ Aab	SI 9, 10
12	Aab	EE 1 y 5 a 11
13	$Aab \rightarrow Aba$	EUG 4
14	Aba	MP 12,13

EJERCICIOS: 161 a 172.

Ejercicios

Comprobar la verdad de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$ en los siguientes casos.

116 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \rightarrow \neg Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow Px)$ $ß \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow \neg Qx)$
117 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \rightarrow \neg Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow Qx)$ $ß \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow \neg Px)$
118 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (Qx \rightarrow \neg Rx)$ $ß \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow \neg Px)$
119 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \rightarrow \neg Qx)$ $\alpha_2 \equiv \exists x\ (Rx \wedge Qx)$ $ß \equiv \exists x\ (Rx \wedge \neg Px)$
120 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (\neg Px \rightarrow Qx)$ $\alpha_2 \equiv \exists x\ (Rx \wedge \neg Px)$ $ß \equiv \exists x\ (Rx \wedge Qx)$
121 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \leftrightarrow \neg Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow Qx)$ $ß \equiv \forall x\ (Px \rightarrow \neg Rx)$
122 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \leftrightarrow \neg Qx)$ $\alpha_2 \equiv \exists x\ (Qx \wedge Rx)$ $ß \equiv \neg \forall x\ (Rx \rightarrow Px)$
123 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \vee Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (\neg Px \vee \neg Qx)$ $ß \equiv \forall x\ (Qx \leftrightarrow \neg Px)$
124 $\alpha_1 \equiv \neg \exists x\ (Px \wedge Qx)$ $\alpha_2 \equiv \exists x\ Px$ $ß \equiv \exists x\ \neg Qx$
125 $\alpha_1 \equiv \neg \forall x\ (Px \vee Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (Rx \rightarrow Qx)$ $ß \equiv \exists x\ (\neg Px \wedge \neg Rx)$
126 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (\neg Bx \leftrightarrow Nx)$ $\alpha_2 \equiv \exists x\ Bx$ $ß \equiv \exists x\ \neg Nx$
127 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (\neg Rx \vee \neg qx)$ $\alpha_3 \equiv Ra$ $\alpha_4 \equiv a \approx b$ $ß \equiv \neg Pb$
128 $\alpha_1 \equiv \neg \exists x\ (\forall y (y \approx a \rightarrow Py) \rightarrow Hx)$ $\alpha_2 \equiv \exists x\ \neg Hx \rightarrow \neg \forall x\ (Pa \wedge \neg hx)$
$ß \equiv \forall x\ Hx$
129 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (x \approx a \leftrightarrow \neg \exists y\ (Py \wedge Myx))$ $\alpha_2 \equiv \neg Ga \rightarrow \neg \forall y\ (Py \rightarrow \neg Mya)$
$ß \equiv Ga$
130 $\alpha_1 \equiv \forall xy\ (Rxy \rightarrow Px)$ $ß \equiv \forall x\ (\exists y\ Rxy \rightarrow Px)$
131 $\alpha_1 \equiv \forall xy\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ $ß \equiv \forall xy\ ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x \approx y)$

132 $\alpha_1 \equiv \forall xy(Rxy \to Ryx)$ $\alpha_2 \equiv \forall xyz((Rxy \land Ryz) \to Rxz)$
$\alpha_3 \equiv \forall x \exists y\ Rxy$ ß$\equiv \forall x\ Rxx$

Comprobar la verdad de $\vdash \beta$ en los siguientes casos.

133 ß$\equiv \forall x\ (Px \leftrightarrow Px)$
134 ß$\equiv \forall x\ \neg(Px \land \neg Px)$
135 ß$\equiv \forall x\ (Px \lor \neg Px)$
136 ß$\equiv \forall x\ (Px \leftrightarrow \neg\neg Px)$
137 ß$\equiv \forall x\ Px \to \exists x\ Px$
138 ß$\equiv \exists x \forall y\ Rxy \to \forall y \exists x\ Rxy$
139 ß$\equiv \exists x\ (Px \land Qx) \to \exists x\ Px \land \exists x\ Qx$
140 ß$\equiv \forall x\ Px \lor \forall x\ Qx \to \forall x\ (Px \lor Qx)$
141 ß$\equiv \forall x\ (Px \to Qx) \to (\forall x\ Px \to \forall x\ Qx)$
142 ß$\equiv \forall x\ (Px \leftrightarrow Qx) \to (\forall x\ Px \leftrightarrow \forall x\ Qx)$
143 ß$\equiv (\exists x\ Px \to \exists x\ Qx) \to \exists x\ (Px \to Qx)$
144 ß$\equiv \forall x\ (Px \to Qx) \to \exists x\ (Px \to Qx)$
145 ß$\equiv \forall x\ (Px \leftrightarrow Qx) \to \exists x\ (Px \leftrightarrow Qx)$
146 ß$\equiv \exists y\ (Fy \to \forall x\ Fx)$
147 ß$\equiv \exists y\ (\exists x\ Fx \to Fy)$
148 ß$\equiv \forall x\ Px \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg Px$
149 ß$\equiv \exists x\ Px \leftrightarrow \neg\forall x\ \neg Px$
150 ß$\equiv \forall x\ \neg Px \leftrightarrow \neg\exists x\ Px$
151 ß$\equiv \exists x\ \neg Px \leftrightarrow \neg\forall x\ Px$
152 ß$\equiv \forall x\ (Px \to Qx) \leftrightarrow \neg\exists x\ (Px \land \neg Qx)$
153 ß$\equiv \exists x\ (Px \land Qx) \leftrightarrow \neg\forall x\ (Px \to \neg Qx)$
154 ß$\equiv \forall x\ (Px \to Qx) \leftrightarrow \forall x\ (\neg Qx \to \neg\ Px)$
155 ß$\equiv \exists x\ (Px \land Qx) \leftrightarrow \exists x\ (Qx \land Px)$
156 ß$\equiv \forall x \forall y\ Rxy \leftrightarrow \forall y \forall x\ Rxy$
157 ß$\equiv \exists x \exists y\ Rxy \leftrightarrow \exists y \exists x\ Rxy$
158 ß$\equiv \forall x\ (Px \land Qx) \leftrightarrow \forall x\ Px \land \forall x\ Qx$
159 ß$\equiv \exists x\ (Px \lor Qx) \leftrightarrow \exists x\ Px \lor \exists x\ Qx)$
160 ß$\equiv \exists x\ (Px \land x \approx a) \leftrightarrow \forall x\ (x \approx a \to Px)$

Comprobar que las siguientes argumentaciones son válidas deduciendo la conclusión de las premisas.

161 Ningún mamífero marino baila el Ballenato. Los rifeños bailan el Ballenato. Las ballenas son mamíferos marinos. Por tanto no hay ballenas rifeñas.

162 Los parlamentarios tienen privilegios legales. Ningún progresista lee El ABC. Todos los parlamentarios son progresistas. Por tanto, ningún parlamentario lee el ABC, a menos que tenga privilegios.

163 Los enunciados metafísicos no son ni empíricos ni analíticos. Todo enunciado con significado es analítico o empírico. Por tanto, los enunciados metafísicos carecen de significado.

164 Sólo los que tienen temor de Dios se salvarán. Ningún ateo cree en Dios. Los que tienen temor de Dios creen en Dios. Por tanto, ningún ateo se salvará.

165 Todos los filósofos se han preguntado qué es la filosofía. Los que se preguntan qué es la filosofía se vuelve locos. Nietzsche es filósofo. El maestro de Nietzsche no acabó loco. Por tanto, Nietzsche y su maestro son diferentes personas.

166 Lancelot ama a la Reina Ginebra. Lancelot no ama a ninguno de sus amigos. El Rey Arturo es amigo de Lancelot. Los amigos de Lancelot odian a aquellos a quienes Lancelot ama. Por tanto, el Rey Arturo odia a la Reina Ginebra.

167 Rosa ama a El Manazas. Pedro no simpatiza con Ana. Quien no simpatiza con Ana ama a Rosa. Si una persona ama a otra, la segunda ama a la primera. Hay como máximo una persona que ama a Rosa. Por tanto, Pedro es El Manazas.

168 Es místico el que se pregunta por el sentido de la existencia humana. Una persona se preocupa por el sentido de la existencia humana si y sólo si considera interesante la pregunta "¿por qué hay algo más bien que nada?" Por tanto, todo el que se hace tal pregunta es místico.

169 Sócrates es sofista y enseña gratuitamente. Sócrates argumenta mejor que cualquier otro sofista. Platón argumenta mejor que algún sofista que enseña gratuitamente. Si una persona argumenta mejor que otra, ésta no argumenta mejor que aquélla. Sólo hay un sofista que enseña gratuitamente. Por tanto, Platón no es sofista.

170 En el S. XIX los demócratas eran liberales o socialistas. Los liberales aceptaban la revolución industrial, la propiedad privada, la economía de mercado y la conversión del trabajo en capital. Los socialistas aceptaban lo primero pero ninguna de las tres cosas restantes. Los conservadores rechazaban la revolución industrial. Por tanto, ni liberales ni socialistas eran conservadores, ningún liberal era socialista y ningún conservador era demócrata.

171 Rosa ama solamente a un hombre. A Luisa le ama sólo un hombre. Luisa ama solamente a un hombre. Alguien que ama a Luisa es amado por ella. Alguien es amado por Rosa y Luisa. Juan ama a Luisa. Todo ello implica que Rosa sólo ama a Juan.

172 Comprobar que las argumentaciones de la parte de teoría de conjuntos que resultaban válidas según el análisis mediante diagramas también son válidas según el cálculo de L1.

CAPÍTULO 9

METALÓGICA

Una vez vistas las nociones de *consecuencia lógica* y *deducibilidad* en la lógica de primer orden, podemos preguntarnos, al igual que hicimos en la lógica proposicional, si ambas nociones, aunque expresando ideas diferentes, coinciden en los resultados. Como ya sabemos, eso es preguntarse si el cálculo que hemos presentado es semánticamente correcto y completo. Junto con estas propiedades, interesa saber también en general, como vimos, si el cálculo es consistente y decidible. Vamos a recordar sin comentario las correspondientes definiciones y sus corolarios, y veremos después los metateoremas correspondientes al cálculo de primer orden, sin apenas justificación pues casi todos requieren un aparato formal que excede los límites de esta presentación.

1. Propiedades: consistencia, consistencia máxima, corrección, completud, decidibilidad

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *consistente* $syss_{def}$ $\{\alpha / \vdash_L \alpha\}$ es consistente.

COROLARIO: El cálculo C_L del lenguaje L es *consistente* syss existe α tal que no $\vdash_L \alpha$.

DEF Un conjunto de fórmulas Σ es *máximamente consistente* $syss_{def}$ Σ es consistente y para cualquier fórmula α que no pertenezca a Σ, $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

COROLARIO: $\{\alpha / \vdash_L \alpha\}$ es máximamente consistente syss para toda β: o bien $\vdash \beta$ o bien $\vdash \neg\beta$.

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente correcto* $syss_{def}$ para todo conjunto de fórmulas Σ y toda fórmula β: Si $\Sigma \vdash_L \beta$ entonces $\Sigma \models_L \beta$.

COROLARIO: Si el cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente correcto* entonces para toda α: Si $\vdash_L \alpha$ entonces $\models_L \alpha$.

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente completo* syss_{def} para todo conjunto de fórmulas Σ y toda fórmula β: Si $\Sigma \models_L \beta$ entonces $\Sigma \vdash \beta$.

COROLARIO: Si el cálculo C_L del lenguaje L es *semánticamente completo* entonces para toda α: Si $\models_L \alpha$ entonces $\vdash_L \alpha$.

DEF El cálculo C_L del lenguaje L es *decidible* syss_{def} para toda fórmula α hay un procedimiento que permite establecer en un número finito de pasos si $\vdash_L \alpha$ o no $\vdash_L \alpha$.

COROLARIO: Si el cálculo C_L del lenguaje L es decidible entonces para cualesquiera fórmulas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y β, hay un procedimiento que permite establecer en un número finito de pasos si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_L \beta$ o no $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_L \beta$.

2. Metateoremas de la lógica de primer orden

MT1 CORRECCIÓN: El cálculo C_{L1} es semánticamente correcto.

Para establecer este resultado debemos mostrar que las reglas de inferencia "preservan la verdad". El teorema de corrección de L0 ya establece esto para las reglas de las conectivas. Para probar la corrección de L1 bastará por tanto establecer lo mismo para las reglas que hemos introducido nuevas para el universal, el existencial y el igualador.

MT2 COMPLETUD: El cálculo C_{L1} es semánticamente completo.

Este teorema fue probado por Gödel en 1930, prueba que simplificó después Henkin en 1949 (incluso en esta segunda versión, sin embargo, la prueba excede el nivel en que ahora nos encontramos[1]). Así pues, el cálculo de la lógica de primer orden también es a la vez, como el de L0, correcto y completo. En L1, pues, las nociones semántica y calculística de *seguirse de* también coinciden extensionalmente, esto es, dan lugar a exactamente los mismos resultados. Ello será de nuevo útil para "exportar" resultados de la semántica al cálculo (cuando haya resultados útiles en semántica).

COROLARIO. Para todo Σ y β: $\Sigma \vdash_{L1} \beta$ syss $\Sigma \models_{L1} \beta$.

No se piense por ello que estas nociones son siempre coincidentes: la lógica de segundo orden, en la que se cuantifica sobre predicados además de sobre individuos, es incompleta.

MT3 CONSISTENCIA: El cálculo C_{L1} es consistente.

La consistencia del cálculo se sigue, como vimos en L0, directamente del teorema de corrección. Si C_{L1} fuese inconsistente entonces habría al-

1. El lector interesado puede encontrar una buena exposición de la misma en castellano en el libro de C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de Lógica Formal* (Ariel, Barcelona 1998), cap. 17.

guna fórmula α tal que $\vdash_{L1} \alpha$ y $\vdash_{L1} \neg\alpha$. Pero por corrección ocurriría entonces $\models_{L1} \alpha$ y $\models_{L1} \neg\alpha$, lo cual queda excluido pues en semántica tenemos que $\models_{L1} \neg\alpha$ syss $\not\models_{L1} \alpha$.

MT4 CONSISTENCIA MÁXIMA: El conjunto de teoremas de C_{L1}, $\{\alpha / \vdash_{L1} \alpha\}$, no es máximamente consistente.

En este caso basta mostrar que hay alguna sentencia tal que ni ella ni su negación son teoremas, pues por el corolario de la definición, ello equivale a que el conjunto de teoremas lógicos no es máximamente consistente. Tomemos p.e. *Pa*. Si *Pa* fuese teorema, entonces por corrección del cálculo sería también una verdad lógica, pero no lo es. Si ¬*Pa* fuese teorema, entonces otra vez por corrección ¬*Pa* sería una verdad lógica, pero no lo es. Así, hay al menos una sentencia tal que ni ella ni su negación son teoremas, y por tanto, por el corolario, el conjunto de teoremas no es máximamente consistente.

Queda por ver la propiedad de *decidibilidad*. Vamos a presentar ahora el resultado que hemos estado mencionando informalmente a lo largo de toda esta parte:

MT5 DECIDIBILIDAD: El cálculo C_{L1} no es decidible.

Este resultado lo probó Church en 1936 y constituye, junto con el mencionado anteriormente teorema sobre la incompletud de la lógica de segundo orden, uno de los principales *resultados limitativos* de la lógica matemática. Estos teoremas limitativos establecen que hay ciertas cosas que no se pueden hacer en *general*: no se puede en general deducir toda fórmula de segundo orden que sea consecuencia de otras; y no se puede tampoco decidir en general de toda sentencia de primer orden si es o no un teorema lógico. Como hemos insistido, el cálculo por sí solo permite establecer que una sentencia es deducible (cuando hallamos una prueba), pero no que no lo es. Ahora bien, en L0 utilizábamos los teoremas de corrección y completud para exportar los resultados de métodos semánticos de decisión (p.e. tablas de verdad) al cálculo, pues ambos teoremas conjuntamente garantizan que los resultados semánticos lo son también del cálculo. Lo que ocurre ahora es que en semántica de primer orden no tenemos tampoco procedimientos de decisión *generales* que permitan establecer *para una sentencia cualquiera* si es o no una verdad lógica. La situación es pues la siguiente: dada una sentencia cualquiera, si encontramos una deducción de ella sin premisas sabemos que es un teorema lógico; si encontramos una interpretación que la haga falsa sabemos que no es verdad lógica y, por corrección, que tampoco es teorema. Parece que en cada ámbito tenemos "la mitad". Pero no se piense por ello que conjuntamente constituyen un procedimiento de decisión. Dada α, si la deducimos sin premisas es teorema; si damos con una interpretación que la haga falsa, no es teorema. Pero puede perfectamente ocurrir que *ni demos con una deducción ni demos con una interpretación que la haga falsa*, y eso, por supuesto, *no quiere decir que ni sea teorema ni no lo sea*, pues toda fórmula es teorema o no lo es. Ese procedi-

miento combinado, por tanto, no es un procedimiento de decisión que permite establecer de un modo mecánico en un número finito de pasos si α es o no es un teorema (y, por supuesto también, estos comentarios no constituyen una prueba de que no haya tal procedimiento de decisión; sólo muestran que el "procedimiento" combinado aludido no es de decisión; la prueba de Church, como dijimos, excede los límites de esta exposición).

Así pues, la lógica de primer orden es indecidible. Ahora bien, eso es compatible con que *algunas partes de L1* sean decidibles. Esto es, dada una sentencia cualquiera α no hay procedimiento de decisión (para determinar si es verdad lógica/teorema), pero si α tiene ciertas características específicas, si es de cierto tipo determinado, entonces sí hay un procedimiento de decisión. Ello no debe sorprender, pues de hecho es algo que ya sabe el lector a estas alturas. En efecto, la lógica proposicional es una parte de la lógica de primer orden y ya vimos que L0 sí es decidible. Cuando no hay cuantificadores, siguen pudiéndose aplicar los procedimientos semánticos de decisión de L0. Por otro lado, aunque las sentencias tengan cuantificadores, si el universo de donde salen las posibles interpretaciones fuese *finito*, entonces también sería decidible, pues las sentencias cuantificadas en primer orden serían equivalentes a otras sin cuantificadores: *las universales serían equivalentes a una conyunción finita de sentencias particulares, y las existenciales equivalentes a una disyunción finita*. La cuestión es si hay otras partes o *fragmentos* de L1 "más amplias" que L0 y que sean decidibles aun si aceptamos (como es usual) que el universo de posibles interpretaciones es infinito. La respuesta es afirmativa. Para concluir veremos brevemente algunos de esos fragmentos decidibles por orden de progresiva complejidad. Cada fragmento se caracteriza por el tipo de sentencias que pueden intervenir en las inferencias; todos comparten al menos el uso de los cuantificadores. Obviamente, los procedimientos de decisión para los fragmentos posteriores se aplican también a los fragmentos anteriores.

(La decidibilidad se dice de fórmulas solas, pero por el corolario que vimos más arriba, a saber, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$ syss $\vdash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$, debe quedar claro que también se dice de la deducción de una fórmula a partir de otras.)

Silogística aristotélica. La silogística aristotélica consta de sentencias que contienen sólo predicados monádicos y tienen una de las cuatros formas básicas que vimos: universal afirmativo, universal negativo, particular afirmativo y particular negativo:

$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Qx})$
$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \rightarrow \neg \mathbf{Qx})$
$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Qx})$
$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \neg \mathbf{Qx})$

El procedimiento de decisión es en este caso sencillo:

$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \rightarrow \mathbf{Qx})$ es teorema syss $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$
$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \rightarrow \neg \mathbf{Qx})$ no es teorema en ningún caso
$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Qx})$ no es teorema en ningún caso
$\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{Px} \wedge \neg \mathbf{Qx})$ no es teorema en ningún caso

Los argumentos que incluyen sólo tres predicados monarios en dos premisas más la conclusión conforman la lista de *silogismos posibles* de la lógica aristotélica. Se puede decidir cuáles de ellos son válidos.[2] Después, combinando varios, es posible a veces decidir argumentos con más de tres predicados monarios.

Predicados monarios. Un fragmento mayor de L1 lo constituyen las sentencias con sólo predicados monarios pero sin restricción en su forma lógica. Cuando sólo hay tres predicados involucrados es fácil decidir si una sentencia es un teorema o si una sentencia se sigue de otras. Un procedimiento de decisión tal, cuando las sentencias contienen un único cuantificador (nótese que aunque los predicados sean monarios puede haber más de un cuantificador, p.e. $\forall x\ (Px \rightarrow \exists x\ Qx)$), son los *diagramas conjuntistas*, que presentamos en el apéndice de la parte dedicada a la teoría de conjuntos. Los casos restantes (cuando hay más de tres predicados involucrados en el argumento o más de un cuantificador) a veces se puede decidir por combinación de casos anteriores, pero no siempre. Un procedimiento general de decisión para la lógica de primer orden de predicados monádicos, para cualquier número de premisas y sentencias con cualquier forma lógica, consiste en convertir la sentencia en forma normal disyuntiva y analizar cada una de las posibilidades resultantes.[3] Otro método de decisión para la lógica cuantificacional monádica lo constituyen las *tablas semánticas*, que se presentan en el apéndice a este capítulo.

Predicados poliádicos. Aunque la lógica cuantificacional con predicados poliádicos no es decidible, algunas partes suyas sí lo son. Son decidibles aquellas sentencias cuyos equivalentes en forma prenexa son de cierto tipo específico. Así, las formas normales prenexas con prefijos cuantificacionales de los siguientes tipos son decidibles:

— sólo universales: $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\ \alpha$
— sólo existenciales: $\exists \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\ \alpha$
— existenciales sin universales posteriores: $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\ \exists \mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_m\ \alpha$
— sólo un existencial: $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\ \exists \mathbf{y}\ \forall \mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_m\ \alpha$
— sólo dos existenciales y éstos están seguidos: $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\ \exists \mathbf{yz}\ \forall \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_m\ \alpha$

Apéndice: Tablas semánticas

Acabamos de ver que la parte de la lógica de primer orden constituida por la lógica cuantificacional monaria es decidible y que uno de los procedimientos de decisión para ella son las denominadas *tablas semánticas*. Vamos a ver aquí en qué consiste dicho procedimiento.

2. Un procedimiento tal se puede encontrar en el libro de Lewis Carroll *The Game of Logic*, Macmillan, Londres 1887 (v. esp. *El juego de la lógica*, Alianza, Madrid 1972); el procedimiento de Carroll no se limita a que haya sólo dos premisas, pero sí a que haya tres predicados.
3. Una versión de este procedimiento se puede encontrar en el libro de Quine *Methods of Logic*, 1950 (v. esp. *Los métodos de la lógica*, Ariel, Barcelona 1962)

Las tablas semánticas permiten establecer (al menos para sentencias de la lógica cuantificacional monaria) si una sentencia, o un conjunto de ellas, es satisfacible. Una vez dispongamos de ese resultado, podemos determinar si una sentencia β se sigue o no de otras $\alpha_1, ..., \alpha_n$, o si una sentencia α es o no una verdad lógica. En el primer caso, sabemos que β es consecuencia de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ syss el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n, \neg\beta\}$ es insatisfacible. Para verdades lógicas, sabemos que α es una verdad lógica syss $\neg\alpha$ es insatisfacible.

Para determinar si una sentencia o un conjunto de ellas es satisfacible se utilizan una serie de reglas que nos permiten decir, para cada tipo de fórmula, qué se sigue de su verdad o de su falsedad, esto es, qué se sigue de ella o de su negación. Si tenemos una de tales reglas para cada tipo de fórmula y su negación, entonces podemos ir sacando las consecuencias de las sentencias originales. Algunas de estas reglas nos obligan a "bifurcar" el diagrama, pues son reglas que dicen "si α es verdad, entonces β es verdad o γ es verdad". Tras la aplicación sucesiva de las reglas semánticas, obtenemos un grafo en forma de árbol invertido (con quizás una única rama). Si cada rama es tal que contiene una sentencia y su negación, entonces la serie de sentencias iniciales es insatisfacible. Si se concluye el grafo con al menos una rama sin contradicción, las sentencias de partida son satisfacibles. Veamos cuáles son esas reglas.

REGLAS SEMÁNTICAS

Las reglas semánticas (salvo la de falsedad del igualador) son de alguna de estas dos formas:



Las del primer tipo se leen: "Si α es verdadera, entonces β es verdadera (y ... es verdadera)". Las del segundo tipo se leen "Si α es verdadera, entonces β es verdadera o γ es verdadera". Como hemos indicado, cada tipo de fórmula y su negación tienen una regla tal. Veamos cuáles son (muchas de ellas, como se advertirá, se corresponden con reglas primitivas o derivadas del cálculo, lo cual no es sorprendente pues ya vimos que el cálculo es semánticamente correcto). Después de lo que vimos en semántica, su justificación debe estar clara. Las únicas que merecen comentario son las reglas de verdad del existencial y de falsedad del universal. Si una sentencia existencial, p.e. $\exists x\ Px$, es verdadera, entonces es verdadero también un "ejemplo" o "caso" suyo, Pa, *siempre y cuando del objeto que usemos para ejemplificar no se haya dicho nada substantivo antes* (no esté en las sentencias de partida ni se haya obtenido por un procedimiento análogo al de esta regla), pues en ese caso no podemos asegurar que el objeto que satisface $\exists x\ Px$ sea el mismo del que ya habíamos hablado. Por eso es

conveniente ejemplificar con objetos "nuevos", o que se hayan obtenido antes de sentencias universales. Algo análogo ocurre con la regla de falsedad del universal, e.e. de la verdad de p.e. la sentencia $\neg\forall x\ Px$. Si tenemos una sentencia tal, entonces el universal tiene un "contraejemplo" (si no todo es tal, entonces "todo es tal" tendrá un contraejemplo), e.e. de algún objeto *a* será cierto $\neg Pa$, siempre que se cumplan las mismas restricciones anteriores, pues si de *a* se ha dicho antes algo sustantivo no podemos asegurar que el contraejemplo sea *ese*. Esto se ve inmediatamente si recordamos la equivalencia semántica entre $\neg\forall x\ Px$ y $\exists x\ \neg Px$ y aplicamos entonces la regla anterior de verdad del existencial.

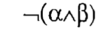
Verdad del conyuntor: V∧

$\alpha\wedge\beta$

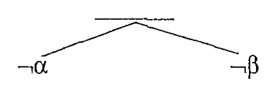
———

α
β

Falsedad del conyuntor: F∧



$\neg(\alpha\wedge\beta)$

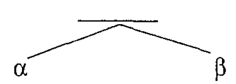


$\neg\alpha$ $\neg\beta$

Verdad del disyuntor: V∨



$\alpha\vee\beta$



α β

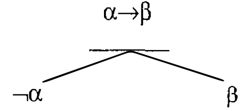
Falsedad del disyuntor: F∨

$\neg(\alpha\vee\beta)$

———

$\neg\alpha$
$\neg\beta$

Verdad del condicional: V→



$\alpha\rightarrow\beta$

$\neg\alpha$ β

Falsedad del condicional: F→

$\neg(\alpha\rightarrow\beta)$

———

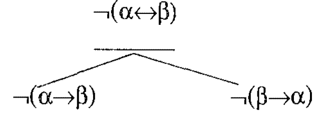
α
$\neg\beta$

Verdad del bicondicional: V↔

$\alpha\leftrightarrow\beta$

$\alpha\rightarrow\beta$
$\beta\rightarrow\alpha$

Falsedad del bicondicional: F↔



Verdad del universal: V∀

$\forall\mathbf{x}\ \alpha(\mathbf{x})$

$\alpha[\mathbf{x},\mathbf{t}]$ Para cualquier término **t** que sea designador

Falsedad del universal: F∀

$\neg\forall\mathbf{x}\ \alpha(\mathbf{x})$

$\neg\alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}]$ Siempre que **c** no aparezca en las sentencias de partida ni se haya obtenido antes por F∀ o V∃

Verdad del existencial: V∃

$\exists\mathbf{x}\ \alpha(\mathbf{x})$

$\alpha[\mathbf{x},\mathbf{c}]$ Siempre que **c** no aparezca en las sentencias de partida ni se haya obtenido antes por F∀ o V∃

Falsedad del existencial: F∃

$\neg\exists\mathbf{x}\ \alpha(\mathbf{x})$

$\neg\alpha[\mathbf{x},\mathbf{t}]$ Para cualquier **t** designador

Verdad de la identidad: V≈

$\alpha(\mathbf{t}_1)$
$\mathbf{t}_1\approx\mathbf{t}_2$

$\alpha(\mathbf{t}_2)$ Para cualesquiera designadores $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$

Falsedad de la identidad: F≈

¬t≈t

——

x

Se puede poner una cruz en una rama cuando lo permita la regla F≈ o cuando en la rama haya una sentencia y su negación. Si el árbol se concluye con todas las ramas con cruz, las sentencias de partida son insatisfacibles; si se concluye con alguna rama sin cruz, son satisfacibles. En cada paso se ha de especificar la regla que se usa y la línea anterior a que se aplica. Las sentencias de partida se marcarán con un guión. Veamos las tablas semánticas para decidir la satisfacibilidad de algunos conjuntos de sentencias.

EJEMPLO: { ¬∀*x* (*Px* →*Px*) }

1 ¬∀*x* (*Px* →*Px*)	-
2 ¬ (*Pa* → *Pa*)	F∀1
3 *Pa*	F→ 2
4 ¬*Pa*	F→ 2
x	

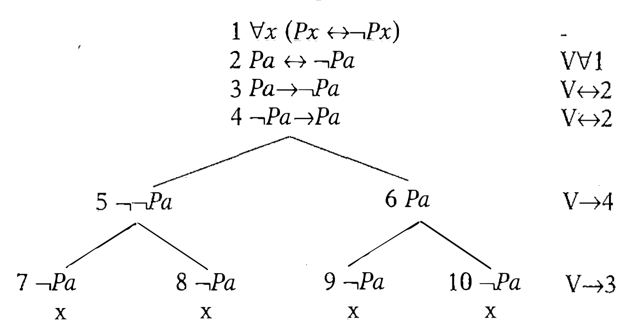
Todas las ramas tienen cruz. Así pues, { ¬∀*x* (*Px* →*Px*) } es insatisfacible, y por tanto ∀*x* (*Px* →*Px*) es una verdad lógica.

EJEMPLO: { ∀*x* (*Px* →¬*Px*) }

1 ∀*x* (*Px* →¬*Px*)		-
2 *Pa* → *Pa*		V∀1
3 ¬*Pa*	4 *Pa*	V→2

Hay ramas sin cruz. Así pues { ∀*x* (*Px* →¬*Px*) } es satisfacible y, por tanto, ¬∀*x* (*Px* →¬*Px*) no es una verdad lógica.

EJEMPLO: { ∀*x* (*Px* ↔¬*Px*) }



Todas las ramas tienen cruz. Así pues { ∀*x* (*Px* ↔¬*Px*) } es insatisfacible y, por tanto, ¬∀*x* (*Px* ↔¬*Px*) es una verdad lógica.

EJEMPLO: $\{ \exists x\, (Px \wedge \neg Px) \}$

1 $\exists x\, (Px \wedge \neg Px)$	-
2 $Pa \wedge \neg Pa$	V∃1
3 Pa	V∧2
4 $\neg Pa$	V∧2
x	

Todas las ramas tienen cruz. Así pues $\{ \exists x\, (Px \wedge \neg Px) \}$ es insatisfacible y, por tanto, $\neg \exists x\, (Px \wedge \neg Px)$ es una verdad lógica.

EJEMPLO: $\{\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \neg \forall x (\neg Qx \rightarrow \neg Px) \}$

1 $\forall x\, (Px \rightarrow Qx)$		-
2 $\neg \forall x (\neg Qx \rightarrow \neg Px)$		-
3 $\neg(\neg Qa \rightarrow \neg Pa)$		F∀2
4 $\neg Qa$		F→3
5 $\neg\neg Pa$		F→3
6 $Pa \rightarrow Qa$		V∀1
7 $\neg Pa$	8 Qa	V→6
x	x	

Todas las ramas tienen cruz. Así pues $\{\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \neg \forall x (\neg Qx \rightarrow \neg Px) \}$ es insatisfacible y, por tanto, $\{\forall x\, (Px \rightarrow Qx) \} \models \forall x (\neg Qx \rightarrow \neg Px) \}$

EJEMPLO: $\{\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \exists x\, (Px \wedge Rx), \neg \exists x (Rx \wedge Qx) \}$

1 $\forall x\, (Px \rightarrow Qx)$			-
2 $\exists x\, (Px \wedge Rx)$			-
3 $\neg \exists x\, (Rx \wedge Qx)$			-
4 $Pa \wedge Ra$			V∃2
5 Pa			V∧4
6 Ra			V∧4
7 $Pa \rightarrow Qa$			V∀1
8 $\neg(Ra \wedge Qa)$			F∃3
9 $\neg Ra$	10 $\neg Qa$		F∧8
x			
	11 $\neg Pa$	12 Qa	V→7
	x	x	

Todas las ramas tienen cruz. Así pues, $\{\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \exists x\, (Px \wedge Rx), \neg \exists x (Rx \wedge Qx) \}$ es insatisfacible y, por tanto, $\{\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \exists x\, (Px \wedge Rx) \} \models \exists x (Rx \wedge Qx) \}$

Ejercicios

Determinar mediante árboles semánticos si las siguientes argumentaciones son o no válidas.

173 Los pájaros vuelan. Los pájaros son animales. En consecuencia, todo animal vuela.

174 Algunos hombres son virtuosos. Algunos delincuentes son hombres. En consecuencia, algunos delincuentes son virtuosos.

175 Todo lo que piensa existe. Ningún cuerpo piensa. En consecuencia, ningún cuerpo existe.

176 Los filósofos enciclopedistas son mediocres. Los filósofos enciclopedistas son filósofos franceses. En consecuencia, los filósofos franceses son mediocres.

177 Algún posmoderno no es moderno. Los yupis son modernos. En consecuencia, algún yupi no es posmoderno.

178 Ningún ser es no ser. Todo lo pensable es ser. En consecuencia, ningún no ser puede ser pensado.

179 Todo mamífero es vertebrado. Algún vertebrado no es mamífero. Ninguna gallina es mamífero. En consecuencia, todas las gallinas no son vertebrados.

180 Todo camaleón misógino es alegre o interesante. En consecuencia, algún camaleón misógino es interesante.

181 Los materialistas son empiristas. No todo empirista es funcionalista. Muchos funcionalistas son materialistas. En consecuencia, algún empirista no es materialista.

182 Los materialistas son empiristas. No todo empirista es funcionalista. Muchos funcionalistas son materialistas. Los empiristas materialistas no son funcionalistas.En consecuencia, algún empirista no es materialista.

CAPÍTULO 10

TÉRMINOS INDIVIDUALES COMPLEJOS. FUNCTORES Y DESCRIPTOR

Cuando presentamos el lenguaje en la primera sección, advertimos que la lista de signos primitivos que dábamos iba a adolecer provisionalmente de cierta deficiencia. El lenguaje de primer orden debería permitir reconstruir la complejidad del lenguaje natural allí donde la haya, es decir, si una expresión del lenguaje natural es compleja, tiene *estructura*, nuestro lenguaje formal debería reflejar dicha estructura, ponerla de manifiesto. Y efectivamente, algunos nombres del lenguaje natural, las llamadas *descripciones*, expresiones como

'el presidente de EE.UU.'
'el menor número primo',

tienen estructura y, sin embargo, nuestro lenguaje formal carece de momento de recursos para expresarla. No podemos expresar esta estructura como combinación de más de un tipo de signo de los de nuestro vocabulario. Así, sólo podemos asignarles constantes individuales, lo que supone tratarlas como nombres simples, análogos a 'Sócrates'. Vamos a paliar ahora esta deficiencia introduciendo signos adicionales para reconstruir la estructura lógica de las descripciones. Lo haremos mediante dos recursos, los functores y el descriptor. El primero es un remedio sólo parcial, pues con su ayuda se pueden reconstruir unas descripciones pero no otras. El descriptor, de manejo más complejo, permite reconstruir cualquier expresión descriptiva (y puede por tanto sustituir el uso de functores allí donde éstos se aplicaban).

1. **Functores**

Los functores se pueden aplicar a la reconstrucción de la estructura de descripciones como

'el presidente de EE.UU.'
'la capital de Francia'
'la suma de 3 y 5'
'el padre de la madre de Juan'

Todas estas descripciones tienen la característica de contener como parte suya otro término individual, que puede ser un término simple ('EE.UU.', 'Francia', '3', '5') o un término también complejo ('la madre de Juan') que a su vez se compone de otro término individual, que puede ser etc. Cuando una descripción es de esta forma, se puede descomponer entonces en, por un lado, el término individual (o los términos individuales) que contiene, y de otro, "el resto". Ese "resto" es lo que llamaremos una *expresión functorial*, y que representaremos en el lenguaje formal mediante functores. Así, podemos descomponer

'el presidente de EE.UU.' en 'EE.UU.' y 'el presidente de ...',
'la capital de Francia' en 'Francia' y 'la capital de ...',
'la suma de 3 y 5' en '3', '5' y 'la suma de ... y ... '
'el padre de la madre de Juan' en 'la madre de Juan' y 'el padre de ...'.

Son expresiones functoriales, por tanto, 'el presidente de ...', 'la capital de ...', 'la suma de ... y ...' y 'el padre de ...'.

Vamos a ampliar nuestro vocabulario, nuestra lista de signos primitivos, con signos que nos permitan formalizar estas expresiones del lenguaje natural. Para ello utilizaremos las siguientes letras

$f, g, h, \ldots$

o una de ellas seguida de subíndices cuando queramos una serie ilimitada:

$f_1, f_2, f_3, \ldots$

Los functores, como los relatores, son expresiones *incompletas*, expresiones que requieren completarse con términos individuales para dar lugar a otras expresiones. Así, 'la capital de' combinada con 'Francia' da lugar al término individual complejo 'la capital de Francia'; y combinada con 'EE.UU.' da lugar a la expresión 'la capital de EE.UU.'. Y también al igual que los relatores, pueden requerir más de un nombre para completarse: 'la capital de ...' requiere uno, pero p.e. 'la suma de ... y ...' requiere dos. Estos nombres que completan los functores son los *argumentos* del functor y llamaremos *ariedad* de un functor al número de argumentos que requiere para completarse. Indicaremos también de momento la ariedad con un superíndice.

EJEMPLOS:

Functores monarios:
el presidente de $\equiv f^1$
la capital de $\equiv g^1$
el padre de $\equiv h^1$

Functores binarios:
la suma de $\equiv f^2$
la recta que pasa por $\equiv g^2$
el dúo formado por $\equiv h^2$

Functores ternarios:
el triángulo formado por los puntos $\equiv f^3$
:
:

Las metavariables que utilizaremos para estos signos son

$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \ldots$ o $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \ldots$

REGLAS DE FORMACIÓN DE TÉRMINOS

Los functores, a diferencia de los relatores, cuando se completan o saturan con el número adecuado de términos individuales, *no dan lugar a fórmulas sino a otros términos individuales*. Cómo escribir esos términos individuales complejos a partir de functores y otros términos individuales anteriores es lo que establecen las *reglas de formación de términos*. Nótese que con la introducción de los functores se deben introducir también nuevas reglas de formación, pues vamos a aceptar nuevas secuencias complejas de signos como expresiones significativas. Las nuevas reglas de formación, sin embargo, no van a ser nuevas reglas de formación de *fórmulas*, pues las nuevas secuencias significativas a que dan lugar los functores no son fórmulas sino *términos*. Serán, pues, reglas de formación de términos. Análogamente al caso de las fórmulas, las reglas establecerán los casos simples de términos y cómo formar términos complejos a partir de functores y otros términos:

(i) Toda constante individual **c** sola es término.
(ii) Toda variable individual **v** sola es término.
(ii) Si $\mathbf{f}^n$ es un functor n-ario y $\mathbf{t}_1, \ldots \mathbf{t}_n$, son términos, entonces la secuencia $\mathbf{f}^n\ \mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ es término.
(iii) Sólo son términos las secuencias de signos que satisfacen las cláusulas anteriores.

Así, por ejemplo, sean f^1 y g^2 dos functores, monario y binario respectivamente, entonces las secuencias

a
x
f^1a
$f^1 f^1a$
g^2xa
g^2bb
$g^2x\ f^1a$
$g^2b\ g^2ay$
$g^2\ f^1ab$
$f^1\ g^2ab$
$g^2\ g^2\ g^2aycy$

son términos, pero no lo son las secuencias

f^1ab
$g^2\ a$
$g^2\ f^1a$
f^1xf^1a
g^2xac
f^1g^2bbc

Para practicar con las reglas y la ariedad de functores, vamos a determinar la ariedad necesaria para que una secuencia de signos esté bien formada.

EJEMPLO: ¿Qué ariedad ha de tener el functor f para que la siguiente secuencia sea un término?
$f^?ag^2h^1xcb$
Veamos: h^1 se aplica a x; g^2 se aplica a h^1x y a c; así, f ha de aplicarse a a, g^2h^1xc y b.
La ariedad de f es por tanto 3.

EJEMPLO: ¿Qué ariedad ha de tener el functor g para que la siguiente secuencia sea una fórmula?
$R^2g^?h^1x\ f^2xy\ cb$
Veamos: R^2 se aplica a los dos términos que le siguen; como no tiene ninguno simple inmediatamente a su derecha, su primer argumento es el término complejo que comienza por g, y su segundo argumento será b; así, los argumentos de g forman la secuencia $h^1x\,f^2xyc$; en esta secuencia h^1 se aplica a x, f^2 se aplica a x y a y; así, g ha de aplicarse a h^1x, f^2xy y c.
La ariedad de g es por tanto 3.

A partir de ahora, para facilitar la escritura, como hicimos con los relatores, prescindiremos de los superíndices y consideraremos que tienen la ariedad requerida. Antes de pasar a la formalización de descripciones con expresiones functoriales del lenguaje natural, vamos a presentar brevemente la distinción entre *términos abiertos* y *términos cerrados* o *designadores*. Un *término abierto* es un término individual con alguna variable libre, y un *designador* es un término individual no abierto, es decir, sin variables libres, que o bien no tiene variables o bien tiene variables pero están ligadas. Así, por ejemplo, de la lista de términos que dimos más arriba, son términos abiertos

x
g^2xa
$g^2x\ f^1a$
$g^2b\ g^2ay$
$g^2\ g^2\ g^2aycy$

y son designadores

a
f^1a

$f^1 f^1 a$
$g^2 bb$
$g^2 f^1 ab$
$f^1 g^2 ab$

El lector se preguntará cómo puede haber términos con variables en los que las variables estén ligadas, pues de momento las reglas de formación de términos no contienen ningún recurso para ligar variables. En la próxima sección veremos que el descriptor tendrá precisamente la función de ligar variables en términos.

FORMALIZACIÓN

Para formalizar nombres complejos que incluyan functores hay que:

(a) identificar los nombres simples y expresiones functoriales involucradas,
(b) asignar a cada nombre simple una constante individual y a cada expresión functorial un functor
(c) reconstruir la estructura del nombre complejo mediante las constantes individuales y los functores.

A partir de ahora, como anunciamos, prescindiremos de los superíndices.

EJEMPLO: la madre de la madre de Luis
Signos simples:
$f \equiv$ la madre de
$a \equiv$ Luis
Formalización: *ffa*

EJEMPLO: el que casó al hermano de Pedro con la hija de Rosa
Signos simples:
$f \equiv$ el que casó a ... con ...
$g \equiv$ el hermano de
$h \equiv$ la hija de
$a \equiv$ Pedro
$b \equiv$ Rosa
Formalización: *fgahb*

EJEMPLO: el producto del menor número natural con el 5
Signos simples:
$f \equiv$ el producto de
$a \equiv$ el menor número natural[1]
$b \equiv 5$
Formalización: *fab*

1. Nótese que esta descripción no podemos formalizarla de modo complejo mediante functores y, por tanto, debemos asignarle una constante individual simple. Este será el tipo de descripciones para el que introduciremos en la próxima sección el descriptor.

Cuando el nombre complejo forma parte de un enunciado, simplemente se incorpora la formalización del nombre a la formalización del enunciado.

EJEMPLO: Juan admira al maestro del hermano de su mujer
Signos simples:
$A \equiv$ admirar a
$f \equiv$ el maestro de
$g \equiv$ el hermano de
$h \equiv$ la mujer de
$b \equiv$ Juan
Formalización: $Abfghb$

EJEMPLO: Nadie, salvo el sobrino de Creonte, está desposado con su propia madre
Signos simples:
$D \equiv$ estar desposado con
$f \equiv$ el sobrino de
$g \equiv$ la madre de
$a \equiv$ Creonte
Formalización: $\forall x\ (\neg x{=}fa \leftrightarrow \neg Dxgx)$

INTERPRETACIÓN SEMÁNTICA[2]

Al ampliar el vocabulario primitivo con un nuevo signo no lógico debemos especificar en la semántica el tipo de entidad que le puede asignar la función interpretación **I**. La idea es sencilla: si los functores son partículas del lenguaje que aplicadas a términos dan lugar a términos, entonces **I** les asignará entidades que "aplicadas" a la interpretación de los términos, e.e. aplicadas a objetos del universo de discurso, "den lugar" a objetos del universo de discurso. ¿Qué tipo de entidad hace eso? Las funciones. A cada functor **f**, **I** asignará una función tal que a cada objeto del universo de discurso **U** le haga corresponder otro objeto de **U**. Como en el caso de los relatores, **I** debe preservar la ariedad: si el functor es monario, la función será monaria, a cada objeto le hará corresponder otro; si el functor es binario, la función será binaria, a cada dos objetos les hará corresponder otro; y así sucesivamente. Por tanto, si $\mathbf{f}^n$ es un functor n-ario:

$\mathbf{I}(\mathbf{f}^n)$ es una función n-aria de $\mathbf{U}^n$ en $\mathbf{U}$

(e.e. $\mathbf{I}(\mathbf{f}^n)$ ha de ser una relación n+1-aria, $\mathbf{I}(\mathbf{f}^n) \subseteq \mathbf{U}^{n+1}$, que sea función y con dominio igual a $\mathbf{U}^n$)

2. Como advertimos en el capítulo 7, la semántica de primer orden utiliza algunas nociones conjuntistas. Para la semántica de los functores, además de las nociones requeridas entonces, se requiere estar familiarizado con la noción de función (cf. sec. 1 cap. 13).

Una vez tenemos interpretados los functores, y los términos simples, entonces los términos complejos reciben automáticamente una interpretación a partir de las anteriores. La interpretación **I** asigna al término complejo $\mathbf{f}^n\ \mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ el objeto que **I** ($\mathbf{f}^n$) hace corresponder a $<\mathbf{I}(\mathbf{t}_1), \ldots, \mathbf{I}(\mathbf{t}_n)>$.

EJEMPLO: Dar una interpretación para el término complejo *ffa*.
I: **U**={1,2,3,4} **I**(*f*)={<1,3>, <2,3>, <3,1>, <4,4>}, **I**(*a*)=2
Según esta interpretación, **I**(*f*) asigna el 3 a **I**(*a*)=2, por tanto **I**(*fa*)=3. Y puesto que **I**(*f*) asigna el 1 al 3, tenemos que **I**(*ffa*)=1.

Ahora podemos incorporar la interpretación de términos individuales complejos a la interpretación de las sentencias que los contienen:

EJEMPLO: Para la sentencia $\forall x\ (Px \wedge Rbx \rightarrow \neg fx{\approx}a)$, dar una interpretación que la haga verdadera y otra que la haga falsa.
La siguiente interpretación la hace verdadera:
$\mathbf{I}_1$: **U**={1,2,3,4}, **I**(*a*)=1, **I**(*b*)=4, **I**(*P*)={1,2}, **I**(*f*)={<1,1>, <2,2>,<3,2>, <4,3>}, **I**(*R*)={<1,3>, <1,2>, <4,2>, <2,1>}
La siguiente interpretación la hace falsa:
$\mathbf{I}_2$: **U**={1,2,3,4}, **I**(*a*)=1, **I**(*b*)=4, **I**(*P*)={1,2}, **I**(*f*)={<1,1>, <2,2>,<3,2>, <4,3>}, **I**(*R*)={<4,1>, <1,2>, <4,2>, <2,1>}

Nótese que, de acuerdo con la definición que hemos dado de la interpretación de functores, y como muestra este ejemplo, la función que interpreta el functor ha de estar definida para todo el universo de discurso, e.e. su dominio ha de ser **U** (para functores monarios; análogamente para otras ariedades; esta condición es poco realista aplicada al lenguaje natural, que contiene functores como 'el marido de' que no están definidos para todo objeto del universo sino sólo para pare del universo, en este ejemplo las mujeres casadas).

Esta ampliación de la semántica de primer orden para incorporar la semántica de términos singulares complejos con functores se extiende de modo natural a las nociones de satisfacibilidad y consecuencia, verdad y equivalencia lógicas, así como a la comprobación de la invalidez de argumentos en lenguaje natural. Veamos un caso de esto último.

EJEMPLO: Comprobar la invalidez del argumento "Platón respeta a su maestro. Todo el que respeta a su maestro es admirado por él. Nadie se respeta a sí mismo. Por tanto, el maestro de Platón es él mismo."

Signos primitivos:
$a \equiv$ Platón
$f \equiv$ el maestro de
$R \equiv$ respetar a
$A \equiv$ admirar a

Premisas y conclusión:
$\alpha_1 \equiv Rafa$
$\alpha_2 \equiv \forall x\ (Rxfx \rightarrow Afxx)$
$\alpha_3 \equiv \forall x\ \neg Rxx$
$\beta \equiv fa{\approx}a$

Prueba de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \nvDash \beta$
La siguiente interpretación hace verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión:
$\mathbb{I}_I$: $\mathbb{U}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbb{I}(a)=1$, $\mathbb{I}(f)=\{<1,2>,<2,2>,<3,1>,<4,3>\}$, $\mathbb{I}(R)=\{<1,2>\}$, $\mathbb{I}(A)=\{<2,1>\}$

CÁLCULO

La incorporación de functores no supone ninguna modificación o ampliación sustancial del cálculo, pues no se trata de un nuevo signo lógico, lo que requeriría introducir nuevas reglas de inferencia. Ahora tan sólo hemos de modificar ligeramente alguna regla anterior. La modificación es inmediata y muy sencilla pues consiste simplemente en sustituir 'constante individual' por 'designador' en las reglas EU (eliminación del universal), IE (introducción del existencial) y SI (sustitución de la identidad). Veamos para acabar una deducción que incluye functores.

EJEMPLO: Comprobar $\{\forall x\ (x{\approx}fa \rightarrow \neg a{\approx}fx), \forall x\ (Rbx \rightarrow a{\approx}fx)\} \vdash \neg\forall x\ Rbx$

1 $\forall x\ (x{\approx}fa \rightarrow \neg a{\approx}fx)$	Pr
2 $\forall x\ (Rbx \rightarrow a{\approx}fx)$	Pr
3 $fa{\approx}fa \rightarrow \neg a{\approx}ffa$	EU 1
4 $fa{\approx}fa$	II
5 $\neg a{\approx}ffa$	MP 3,4
6 $Rbfa \rightarrow a{\approx}ffa$	EU 2
7 $\neg\ Rbfa$	MT 5,6
8 $\exists x\ \neg Rbx$	IE 7
9 $\neg\forall x\ Rbx$	NEU 8

EJERCICIOS: 183 a 197.

2. **Descriptor**

Los functores proporcionan un modo de reconstruir la estructura interna de algunos nombres complejos del lenguaje natural, pero no de todos. En efecto, cuando la descripción es del tipo 'el tal de ...', donde en los puntos suspensivos aparece un término individual, entonces podemos aplicar el análisis mediante functores. Pero no todas las descripciones son así. Por ejemplo, las que siguen no lo son:

'el menor número primo'

'la montaña más alta'

'la ciudad más poblada'

'el cuento más largo jamás contado'

'el escritor más prolífico'

'aquello más perfecto que lo cual nada puede ser pensado'

Estas descripciones son términos individuales complejos, estructurados, pero no se pueden analizar como combinación de functores y términos individuales, simplemente porque ninguna de sus partes es un término individual. Estas descripciones son del tipo "el ...", donde en ningún lugar en los puntos suspensivos aparece un término individual. Estas descripciones se llaman descripciones *completamente generales*, pues no contienen ningún elemento particular.

Así pues, no es posible reconstruir la estructura de las descripciones completamente generales mediante functores. Esto, de nuevo, es una deficiencia del lenguaje formal, pues éste debe en principio ser capaz de poner de manifiesto la complejidad allí donde la haya. Si no añadimos nuevos recursos de análisis, 'el menor número primo' se formaliza igual que 'Sócrates'. Para paliar esta deficiencia se introduce un nuevo signo lógico, el *descriptor*, con cuya ayuda podemos analizar la estructura de las descripciones completamente generales (y de las no completamente generales también, por lo que disponiendo del descriptor podríamos prescindir, como veremos, de los functores). El signo que vamos a usar para el descriptor va a ser

ι

y se va a leer:

"el único objeto tal que ...".

El descriptor es, como los cuantificadores, un signo *ligador*, e.e. un signo lógico que se aplica a variables ligándolas. Pero, como también ocurría con los cuantificadores, no se aplica sólo a variables, se aplica a variables *y* fórmulas (fórmulas que, en los casos usuales, contendrán libre la variable a la que se aplica el descriptor). A diferencia de los cuantificadores, sin embargo, el descriptor, aplicado a variables y fórmulas no da lugar a fórmulas sino que, como su lectura informal sugiere, da lugar a *términos*. La idea es que si completamos "el único objeto x tal que ...." con una fórmula α obtenemos un término individual; si, como ocurre en los casos usuales, α contiene libre a la variable x y sólo a ella, entonces el término individual es cerrado, esto es, es un designador, designa un objeto concreto.

Reglas de formación de términos

De acuerdo con las anteriores consideraciones, vamos a ampliar ahora las reglas de formación de términos con una nueva cláusula para los descriptores:

(i) Toda constante individual $\mathbf{c}$ sola es término.
(ii) Toda variable individual $\mathbf{v}$ sola es término.
(iii) Si $\mathbf{v}$ es una variable y α una fórmula, entonces la secuencia $\iota\mathbf{v}\,\alpha$ es término.
(iv) Si $\mathbf{f}^n$ es un functor n-ario y $\mathbf{t}_1, \ldots \mathbf{t}_n$, son términos, entonces la secuencia $\mathbf{f}^n\, \mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ es término.

(v) Sólo son términos las secuencias de signos que satisfacen las cláusulas anteriores.

Así, por ejemplo, son términos las secuencias de signos

x

a

$\iota x\ Px$

$\iota x\ Pa$

$\iota x\ Rxa$

$\iota x\ Rba$

$\iota x\ Rxy$

$\iota x\ \neg Rxa$

$\iota x\ (Px \wedge Rxy)$

$\iota x\ (Px \wedge \exists y\ Rxy)$

$\iota x\ \forall y\ (\neg Px \rightarrow Rxy)$

$\iota x\ fx{\approx}\iota y Py$

$\iota x\ P\iota y Rxy$

$f\ \iota x Px$

$g^2\ \iota x\ x{\approx}fa\ \iota y\ Py$

y no son términos las secuencias

$\neg\iota x\ Px$

$\iota xy\ Rxy$

$\iota x\ \iota y\ Rxy$

$\iota x\ Rxy \approx \iota y\ Py$

Como el descriptor es un signo ligador, las definiciones que dimos en el cap. 6 de ocurrencia libre y ligada de una variable en una expresión (y las que se derivan de ella) deben modificarse. Pero la modificación es inmediata: se sustituye 'cuantificador' por 'signo ligador', y se especifica después que son signos ligadores los dos cuantificadores y el descriptor. Una vez hemos hecho eso, se aplica a los términos con descriptores la misma diferencia entre *términos abiertos* y *designadores* que hemos introducido en la sección anterior: un *término abierto* es un término con al menos una variable libre, un *designador* es un término sin variables libres, esto es, que no contiene variables o que contiene variables pero todas están ligadas. Debe estar claro ahora algo que se dejó pendiente cuando estudiamos los functores, a saber, cómo es posible que haya términos con variables ligadas. Pues bien, ello es posible por la presencia de descriptores. Así, por ejemplo, de la lista de términos que acabamos de dar, son términos abiertos

x

$\iota x\ Rxy$

$\iota x\ (Px \wedge Rxy)$

y son designadores

a

$\iota x\ Px$

$\iota x\ Pa$
$\iota x\ Rxa$
$\iota x\ Rba$
$\iota x\ \neg Rxa$
$\iota x\ (Px \land \exists y\ Rxy)$
$\iota x\ \forall y\ (\neg Px \to Rxy)$
$\iota x\ fx{\approx}\iota y Py$
$\iota x\ P\iota y Rxy$
$f\ \iota x Px$
$g^2\ \iota x\ x{\approx}fa\ \iota y\ Py$

Como ocurría con las reglas de formación de fórmulas, que permitían sentencias "cuantificadas" anómalas, como $\forall x\ Rab$, las reglas de formación de términos también permiten designadores descriptivos anómalos, como $\iota x\ Rab$. En la formalización del lenguaje natural, sin embargo, como ya ocurría con las sentencias, no aparecerán tales casos anómalos.

FORMALIZACIÓN

Para formalizar una descripción mediante descriptores hay que:

(a) identificar las expresiones simples involucradas en la descripción
(b) asignarles signos simples del alfabeto
(c) reconstruir la fórmula a la que se aplica el descriptor.

EJEMPLO: el rey calvo
Signos primitivos:
$R \equiv$ ser rey
$C \equiv$ ser calvo
Formalización: $\iota x\ (Rx \land Cx)$

EJEMPLO: el padre del rey calvo
$R \equiv$ ser rey
$C \equiv$ ser calvo
$P \equiv$ ser padre de
Formalización: $\iota x\ Px\iota y(Ry \land Cy)$

EJEMPLO: la musa de todos los artistas
$A \equiv$ ser artista
$M \equiv$ ser musa de
Formalización: $\iota x\ \forall y\ (Ay \to Mxy)$

EJEMPLO: el menor número primo
$P \equiv$ ser número primo
$M \equiv$ ser menor que
Formalización: $\iota x\ (Px \land \forall y\ (Py \land \neg x{\approx}y \to Mxy))$

Eliminación de functores

Acabamos de ver cómo utilizar el descriptor para formalizar descripciones del lenguaje natural completamente generales. Pero, como anunciamos, nada impide aplicar este mismo análisis a cualquier descripción, incluidas las que antes formalizábamos mediante functores. Esta posibilidad alternativa muestra que, si disponemos del descriptor, podemos prescindir de los functores, y que si no se prescinde es sólo por comodidad expresiva (aunque al precio de perder simplicidad en nuestro alfabeto).

En realidad, el segundo de los anteriores ejemplos ya muestra cómo hacerlo. En efecto, 'el padre del rey calvo' es una descripción que contiene términos individuales, pues una parte de ella es 'el rey calvo'. Podríamos haberla analizado del siguiente modo:

Signos primitivos:
R ≡ ser rey
C ≡ ser calvo
f ≡ el padre de
Formalización: $f\ \iota x(Rx \wedge Cx)$

Nótese que esta formalización usa la expresión functorial 'el padre de', mientras que la anterior usaba la expresión relacional 'ser padre de'. Veamos dos casos en que la descripción contiene algún término simple.

EJEMPLO: el maestro de Aristóteles
Con functores. Signos primitivos:
f ≡ el maestro de
a ≡ Aristóteles
Formalización: fa
Sin functores. Signos primitivos:
M ≡ ser maestro de
a ≡ Aristóteles
Formalización: $\iota x\ Mya$

Ejemplo: "el padre del maestro de Aristóteles"
Con functores. Signos primitivos:
f ≡ el maestro de
g ≡ el padre de
a ≡ Aristóteles
Formalización: gfa
Sin functores. Signos primitivos:
M ≡ ser maestro de
P ≡ ser padre de
a ≡ Aristóteles
Formalización: $\iota x\ Px\ \iota y\ Mya$

En general, pues, ante una descripción del tipo 'el tal de fulano', donde 'tal' es una expresión relacional y 'fulano' un designador (simple o complejo), podemos formalizarla siempre mediante functores del siguiente modo:

Signos:
f ≡ el tal de
a ≡ fulano
Formalización: **fa**

Pero también prescindiendo de los functores mediante el descriptor:

Signos:
R ≡ ser tal de
a ≡ fulano
Formalización: **ιx Rxa**

Para decirlo informalmente, la secuencia sígnica **ιx Rx** (que no es ni término ni fórmula, recuérdese que **R** es un relator binario) hace la misma función que el functor **f**. Pero debe quedar claro que los signos de los que se parte en ambos casos son diferentes.

INTERPRETACIÓN SEMÁNTICA

El descriptor es un nuevo signo lógico, por lo que dar su interpretación semántica es especificar cuál es el objeto asignado en función de la interpretación de los signos que contiene la fórmula a la que se aplica. Como da lugar a términos, el objeto asignado será uno de los individuos del universo. La idea es muy sencilla, pero su exposición precisa es muy compleja, así que la expondremos sólo informalmente. La idea es que una interpretación **I** asigna al designador

ιx α(x)

el único objeto que "hace verdadero α", dadas las interpretaciones de los signos que aparecen en α.

EJEMPLO: $\iota x\ (Px \wedge Qx)$
I: **U**={1,2,3,4}, **I**(*P*)={1,2} **I**(*Q*)={2,3}
Ello determina que **I**($\iota x\ (Px \wedge Qx)$) = 2, pues 2 es el único objeto de **U** que está a la vez en **I**(*P*) y **I**(*Q*).

EJEMPLO: $\iota x\ (Nx \wedge \forall y\ Ryx)$
I: **U**={1,2,3}, **I**(*N*)={1,2}, **I**(*R*)={<1,1>,<2,1>,<3,1>,<1,3>,<2,3>,<3,3>, <3,2>}
Ello determina que **I**($\iota x\ (Nx \wedge \forall y\ Ryx)$) = 1, pues 1 es el único objeto de **U** que está en **I**(*N*) y que tiene a todos los objetos de **U** a su izquierda en **I**(*R*); 3 también los tiene todos a su izquierda, pero no está en **I**(*N*); y 2 está en **I**(*N*), pero no tiene a todos a su izquierda, sólo al 3.

Esta es la presentación informal de la función semántica del descriptor. Se puede dar una definición precisa y rigurosa de la misma por un procedimiento parecido al que usamos para los cuantificadores (ampliando el lenguaje con una constante nueva), pero no lo haremos aquí. Nos limitaremos a comentar algo que el lector atento quizás ya se habrá preguntado. En efecto, la interpretación de $\iota x\ \alpha(x)$ es el único objeto "del que es ver-

dad" $\alpha(x)$. Pero ¿qué ocurre si no hay tal objeto?, ¿qué ocurre si una interpretación es tal que de *ningún objeto* es verdad $\alpha(x)$, o tal que $\alpha(x)$ es verdad de *más de un objeto*? Por ejemplo, para la descripción $\iota x\ (Px \wedge Qx)$, la interpretación

$\mathbf{I}_1$: $\mathbf{U}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbf{I}(P)=\{1,2\}$, $\mathbf{I}(Q)=\{3,4\}$

es tal que ningún objeto está a la vez en $\mathbf{I}(P)$ y $\mathbf{I}(Q)$. Y la interpretación

$\mathbf{I}_2$: $\mathbf{U}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbf{I}(P)=\{1,2,3\}$, $\mathbf{I}(Q)=\{2,3,4\}$

es tal que más de un objeto está a la vez en $\mathbf{I}(P)$ y $\mathbf{I}(Q)$. En estos casos, cuando la descripción no es satisfecha por un único objeto del universo de la interpretación, se dice que es una *descripción impropia* en esa interpretación. ¿Qué objeto se asigna en estos casos a la descripción?

En una situación así parece haber dos salidas, ambas no completamente satisfactorias. Una posibilidad es dejar a la descripción sin interpretación: $\iota x\ (Px \wedge Qx)$ sería un designador que no designaría nada. Esta opción es muy insatisfactoria, y no sólo porque resulte "raro" que un designador no designe. Es insatisfactoria por las consecuencias que tiene. Si ese designador no designa, entonces las sentencias que lo contienen no serían verdaderas ni falsas, pues el valor veritativo de una sentencia depende de la interpretación de sus constituyentes; si la sentencia contiene una expresión descriptiva, su valor veritativo depende del objeto que se asigne a esa expresión. Por tanto, si la descripción no nombra a ningún objeto del universo la sentencia no es ni verdadera ni falsa en ese "mundo". Esta consecuencia, la mera idea una de sentencia que no es ni verdadera ni falsa, les parece a muchos inaceptable. Quizás pueda no parecer tan inaceptable que p.e. $A\iota x\ (Px \wedge Qx)$ ('el único objeto que es P y Q es también A') no sea verdadera ni falsa en tales casos. Pero en casos como $P\ \iota x\ (Px \wedge Qx)$ ('el único objeto que es P y Q es también P') esa consecuencia es para algunos más difícil de aceptar. Después de todo 'lo que es P es P' es una verdad lógica, y, según defienden esos críticos, de 'el P es P' puede intuitivamente decirse lo mismo.

La otra posibilidad es asignar en esos casos a la descripción un objeto arbitrario, una especie de "cabeza de turco", un objeto del universo de discurso que se asignaría a todas las descripciones impropias de ese lenguaje. Pero la consecuencia no es mucho más aceptable que la anterior. Es cierto que ahora toda sentencia sería verdadera o falsa, pues todas sus partes tendrían interpretación. Pero por otro lado, el valor veritativo en $\mathbf{I}$ de una sentencia con descripciones impropias sería *completamente arbitrario*, en el sentido de que dependería del objeto arbitrariamente asignado a las descripciones. En ese caso, una sentencia de la forma 'el único P es P' podría ser falsa, si el objeto que arbitrariamente hemos asignado a la descripción impropia 'el único P' es un objeto que no pertenece a la interpretación de P. Y nada impide que así sea. En realidad, si hay más de una descripción impropia y a todas se les asigna el mismo objeto arbitrario, seguro que en general 'el único P es P' no siempre será verdadero, con lo que la intuición que se pretendía salvaguardar se pierde.

Para algunos filósofos, como Russell, la lección es que las descripciones son expresiones "sospechosas", que aunque parecen términos individuales genuinos, nombres, en realidad no lo son. Después de ver las reglas del cálculo para ellas, comentaremos brevemente qué hay que hacer con las descripciones según estos filósofos.

CÁLCULO

Si extendemos nuestro lenguaje con un nuevo signo lógico, debemos entonces extender el cálculo con reglas de inferencia que gobiernen el comportamiento en las deducciones de ese nuevo signo. En realidad tenemos ya algunas de esas reglas, pues algunas de nuestras reglas involucran a designadores, cualesquiera que ellos sean, y las descripciones son designadores. Pero hay que añadir otras específicas para el descriptor. De ellas, la regla más intuitiva es la siguiente: si una línea utilizable afirma que hay un y sólo un objeto que tiene cierta propiedad, entonces podemos escribir que dicha propiedad la tiene "el objeto en cuestión":

Regla de las descripciones definidas: DD

$\exists x\ \forall y\ (\alpha(y) \leftrightarrow x{\approx}y)$

$\overline{\alpha\ [y,\ \iota x\ \alpha(x)]}$ Siempre que x no esté libre en $\alpha(y)$

EJEMPLO: Deducir $Aa\iota xPx$ a partir de Pb, $\forall xy\ (Px \wedge Py \rightarrow x{\approx}y)$ y Aab.

1 Pb	Pr
2 $\forall xy\ (Px \wedge Py \rightarrow x{\approx}y)$	Pr
3 Aab	Pr
4 $\exists x\ Px$	IE 1
5 $\exists x\ \forall y\ (Py \leftrightarrow y{\approx}x)$	IEU 2,4
6 $P\iota xPx$	DD 5
7 $Pb \wedge P\iota xPx \rightarrow b{\approx}\iota xPx$	EUG 2
8 $Pb \wedge P\iota xPx$	IC 1,6
9 $b{\approx}\iota xPx$	MP 7,8
10 $Aa\iota xPx$	SI 3,9

Para ciertos efectos técnicos se incluye otra regla para el caso en que la descripción sea impropia, pero dado su carácter poco intuitivo, y puesto que no vamos a hacer ejercicios en que se dé esa situación, no la presentamos.

ELIMINACIÓN CONTEXTUAL DE DESCRIPCIONES

Hemos visto que los designadores descriptivos plantean intutivamente ciertos problemas ante la posibilidad de que en una interpretación no haya

un y sólo un objeto del universo del que es verdadera la fórmula que sigue al descriptor. Por problemas semejantes a los que hemos comentado, Russell concluyó que no se podían aceptar los designadores descriptivos como términos individuales del lenguaje. Pero obviamente no quería decir que los enunciados del lenguaje natural que incluyen expresiones descriptivas no tuviesen significado. No objetaba a eso. A lo único que objetaba era al análisis de tales enunciados tomando las descripciones como nombres genuinos. Veamos brevemente qué se quiere decir con ello.

Consideremos p.e. el enunciado 'El actual rey francés es calvo'. Parece un enunciado particular, del tipo 'Julio Cesar es calvo', si es que consideramos a 'el actual rey francés' un nombre/designador genuino, al igual que 'Julio Cesar'. Utilizando descriptores podemos analizar ese enunciado como un enunciado particular, aunque poniendo de manifiesto que el término individual que oficia de sujeto en ese caso es complejo (para simplificar, y puesto que no afecta a lo que discutimos, sólo distinguiremos dos predicados):

Signos primitivos:
$F \equiv$ ser rey francés en la actualidad
$C \equiv$ ser calvo
Formalización con descriptores: $C\iota xFx$

Esta formalización o análisis tiene, según Russell, los problemas que comentamos anteriormente. Consideremos la interpretación que coincide "con nuestro mundo", esto es, que tiene como universo el conjunto de personas, como interpretación de F el conjunto de actuales reyes franceses y como interpretación de C el conjunto de personas calvas. En una tal interpretación ιxFx no nombra a ningún objeto (pues $\mathbb{I}(F)$ no tiene un y sólo un elemento, no tiene ninguno en este caso). Por tanto, o bien tal afirmación carece de valor veritativo o bien su valor veritativo es arbitrario dependiendo del objeto que arbitrariamente se asigne a ιxFx. La segunda opción le parece a Russell inaceptable. Y la primera tiene consecuencias que considera indeseables. Ya hemos visto alguna, pero otra en la que él insiste es la siguiente. Si 'El actual rey francés es calvo' no tiene valor veritativo, entonces su negación 'El actual rey francés no es calvo' tampoco lo tiene, pues el valor veritativo de una negación depende del valor veritativo de lo que niega. Pero entonces 'El actual rey francés es calvo o no es calvo' tampoco tendría valor veritativo, pues el valor veritativo de una disyunción depende del valor de sus dos disyuntos. Pero esa consecuencia, piensa Russell, es inaceptable, pues ese último enunciado no es más que un caso del principio del tercio excluso, que es una verdad lógica. Según Russell, esta situación es inadmisible, y no hay escapatoria mientras consideremos a las descripciones como nombres genuinos y analicemos los enunciados que las contienen como enunciados particulares.

La única posibilidad que en su opinión queda es dejar de considerar a las descripciones como designadores genuinos y dejar de analizar los enunciados que las contienen como enunciados particulares. Pero eso no quiere decir que proponga considerar las descripciones como

otro tipo de expresiones (predicativas por ejemplo). Lo que propone no es eso, *sino dejar de considerar a las descripciones como expresiones genuinas de ningún tipo*. Eso quiere decir lo siguiente: aunque según un análisis superficial pueda parecer que las descripciones son expresiones genuinas, unidades de significación, una de las "piezas" que conforman el enunciado, en realidad no es así. Si así fuese tendríamos los problemas que hemos visto y de los que es imposible escapar. Por tanto, hay que llevar a cabo un análisis gramatical más profundo. Según este nuevo análisis, el enunciado original se analiza en una serie de piezas ninguna de las cuales corresponde a una descripción. Russell propone el siguiente análisis, que en su opinión intuitivamente "dice lo mismo" que el original: 'Hay al menos un actual rey francés, y hay como máximo un actual rey francés, y algún actual rey francés es calvo', o sin reiteraciones 'Algún actual rey francés es calvo y hay como máximo un actual rey francés':

Formalización russelliana: $\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow x{\approx}y) \wedge Cx)$

Como se observará, ahora ninguna de las piezas que conforman esta sentencia es una descripción. El análisis ha mostrado que las descripciones, aunque parecían expresiones lingüísticas genuinas, en realidad no lo son, "desaparecen" tras el análisis.

Así como 'algunos hombres' no es una en realidad una pieza del enunciado 'Algunos hombres son mortales', pues su análisis es

$H\equiv$ ser hombre
$C\equiv$ ser mortal
Formalización: $\exists x\ (Hx \wedge Mx)$,

de igual modo 'el actual rey francés' no es una pieza constituyente de 'El actual rey francés es calvo'. Igual que en $\exists x\ (Hx \wedge Mx)$ no hay ninguna parte que corresponda a 'algunos hombres', en $\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fx \rightarrow x{\approx}y) \wedge Cx)$ tampoco hay ninguna parte que corresponda a 'el actual rey francés'. Las descripciones, pues, no son unidades de significación, se eliminan en el análisis. Aunque ellas no tienen significado por sí solas, los enunciados en los que ocurren sí tienen significado, y su estructura sintáctica real es la que muestra la formalización russelliana. Esto es, los enunciados con descripciones son "abreviaturas" sintácticamente confusas de otros enunciados más largos que muestran claramente su estructura lógica, y en ellos se ve que, contra lo que parecía en principio si nos dejamos llevar por la abreviatura sintácticamente confusa, no son enunciados particulares sino generales, cuantificacionales. Eso es lo que se entiende por *eliminación contextual de las descripciones*.

Este es el núcleo de la Teoría de las Descripciones de Russell. Independientemente de lo que se piense de sus motivaciones filosóficas, pone de manifiesto que hay un modo de "decir sin descriptores" lo que decimos con ellos (siempre que "lo que se dice" sea una afirmación, no un nombre). Hoy día hay acuerdo en que la teoría de Russell es válida al

menos para algunos usos de las descripciones en lenguaje natural, los considerados *usos atributivos*, pero algunos filósofos defienden que hay otros usos, los *usos referenciales*, a los que no puede aplicarse este análisis.

EJERCICIOS: 198 a 200.

Ejercicios

Determinar la ariedad de los functores y relatores sin superíndice para que las expresiones resultantes sean términos o fórmulas bien formadas.

183 $Ph^1h^1f^1xy$
184 $Pah^2xyf^3zbg^1ab$
185 $Qaf^2ag^2bh^3cdf^2xg^2yc$
186 $Rh^2h^2j^3f^1af^1bg^2xyf^1yzd$
187 f^1g^2ahbc
188 $hf^1af^1bf^1cd$
189 $gf^2xh^2bh^2axb$
190 $f^2gyh^1zh^1yg^2xj^3zab$
191 $f^4axg^2chyj^3axdzb$
192 $g^2h^1g^2f^3f^3jaxbycdxxdz$

Comprobar la falsedad de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$ en los siguientes casos.

193 $\alpha_1 \equiv Pa$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ \neg fx \approx a$ $\alpha_3 \equiv \forall xy\ (fx \approx fy \rightarrow x \approx y)$ $\alpha_4 \equiv \forall x\ (Px \rightarrow Pfx) \rightarrow \forall x\ Px$
$\alpha_5 \equiv \forall xy\ (Px \wedge Py \rightarrow Rxy \vee Ryx)$ $\alpha_6 \equiv \exists xy\ (\neg x \approx y \wedge Rxy)$
$\alpha_7 \equiv \forall x\ (Rxx \rightarrow \forall y(Rxy \vee Ryx))$ $\beta \equiv \forall x \exists y\ (\neg x \approx y \wedge Rxy)$
194 $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ como en el ejercicio anterior y $\beta \equiv \forall x\ (Rax \vee Px)$

Comprobar la verdad de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$ en los siguientes casos.

195 $\alpha_1 \equiv \forall x\ (\neg Bx \leftrightarrow Nx)$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (fx = a \rightarrow \neg bx)$ $\alpha_3 \equiv fa = a$ $ß \equiv \neg \forall x\ \neg Nx$
196 $\alpha_1 \equiv a \approx gfbb \vee \forall x\ Rxx$ $\alpha_2 \equiv \neg\ a \approx gb$ $\alpha_3 \equiv \forall x\ fbx \approx b$ $ß \equiv Rbb$
197 $\alpha_1 \equiv Na$ $\alpha_2 \equiv \forall x\ (Nx \rightarrow Nfx)$ $\alpha_3 \equiv \forall xy\ (fx \approx fy \rightarrow x \approx y)$ $\alpha_4 \equiv \neg \exists x\ (Nx \wedge fx \approx a)$
$ß \equiv ffa \approx fb \rightarrow b \approx fa \wedge \neg b \approx a$

Formalizar, usando el descriptor para los términos individuales complejos que contengan, los siguientes enunciados.

198 El enunciado del ejercicio 24 del cap. 6.
199 El enunciado del ejercicio 25 del cap 6.
200 Formaliar el enunciado del ejercicio 25 del cap. 6 mediante el análisis de Russell.

TERCERA PARTE

TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

Capítulo 11

CONJUNTOS. NOCIONES Y OPERACIONES BÁSICAS

1. Pertenencia, extensionalidad y conjunto vacío

Los conjuntos, o clases, son "colecciones" de cosas, son entidades que consisten en tener otras entidades como miembros. Ejemplos de estas entidades son el conjunto de árboles en el Parque de la Ciudadela de Barcelona, el conjunto de los filósofos alemanes del siglo XIX, el conjunto de las letras de esta página, el conjunto de los números primos, el conjunto de los números primos menores que 10, el conjunto de los conceptos termodinámicos, el conjunto de las virtudes teologales, el conjunto de las teorías biológicas, el conjunto de los conjuntos de tres elementos, etc.

Denotación por comprensión y por extensión

Podemos nombrar o denotar a los conjuntos en lenguaje ordinario, como acabamos de hacer, pero para abreviar se suele usar el signo

{ .... }

que se lee

"el conjunto formado por ... ".

Este signo se puede usar de dos modos:

(a) poniendo en los puntos suspensivos un nombre de cada uno de los objetos que constituyen el conjunto;
(b) poniendo una variable y dando una condición que satisfacen todos y sólo los objetos que constituyen el conjunto, e.e. '$\{x / \varphi(x)\}$', que se lee "la clase de objetos tales que cumplen la condición φ" (no toda condición determina un conjunto, pues como veremos a continuación eso da lugar a paradojas).

En el primer caso decimos que nombramos el conjunto *por extensión*, en el segundo que lo nombramos *por comprensión*; obviamente, sólo se pueden nombrar por extensión los conjuntos finitos. Son ejemplos de nombres de conjuntos por extensión

'{1,2,3,5,7}'
'{Churchill, Stalin, Roosevelt}'
'{fe, esperanza, caridad}'

y de nombres por comprensión

'{x / x es letra de este libro}'
'{x / x es un número primo}'
'{x / x es un número primo menor que 10}'
'{x / x es una virtud teologal}'
'{x / x es un conjunto con exactamente tres elementos}'

PERTENENCIA

Para referirse a la relación que se da entre un objeto y un conjunto del que dicho objeto es miembro se usa el signo de *pertenencia*

$\in$

Este signo debe estar flanqueado por un signo de objeto a su izquierda y por un signo de conjunto a su derecha. En general usaremos letras mayúsculas cursivas para variables de conjuntos; así,

'$x \in A$' se lee "x pertenece a (es miembro de, es elemento de) A",

y su negación

'$x \notin A$' se lee "x no pertenece a (no es miembro de, no es elemento de) A".

Son pues ejemplos de enunciados conjuntistas (verdaderos):

'$3 \in$ {1,2,3,5,7}'
'$3 \in$ {x / x es un número primo}'
'Schopenhauer $\in$ {x / x es filósofo alemán del siglo XIX}'
'{Churchill, Stalin, Roosevelt} $\in$ {x / x es un conjunto de tres elementos}'
'$4 \notin$ {1,2,3,5,7}'
'$4 \notin$ {x / x es un número primo}'
'Stalin $\notin$ {x / x es un conjunto de tres elementos}'

Nótese que, aunque no todo objeto es conjunto, todo conjunto sí es un objeto. Por ello en el cuarto de estos últimos ejemplos el signo de pertenencia sigue teniendo a su izquierda el nombre de un objeto, en este caso un conjunto.

EXTENSIONALIDAD

El principio básico que rige la identidad de los conjuntos es el *principio de extensionalidad*, a saber, los conjuntos son entidades *extensionales*, su identidad depende sólo de su extensión, de cuáles son los elementos que los constituyen:

Axioma de extensionalidad

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos son el mismo conjunto: Para cualesquiera A,B : si para todo x ($x \in A$ syss $x \in B$), entonces $A=B$.

Así, por ejemplo, los conjuntos

{1,2,3,5,7}
{x / x es un número primo menor que 10}

son el mismo conjunto, pues todo objeto que está en uno está en otro y viceversa; '{1,2,3,5,7}' y '{x/x es un número primo menor que 10}' son nombres diferentes de la misma entidad (exactamente igual que 'la madre de Edipo' y 'la mujer de Edipo' son nombres diferentes de la misma entidad). Es esencial notar que la extensionalidad de los conjuntos es una característica de las entidades mismas y que, por tanto, la identidad de los conjuntos no depende de cómo se nombren. Que nombremos a un conjunto por comprensión, apelando a una propiedad que satisfacen sus miembros, no afecta para nada la extensionalidad del conjunto. Las *propiedades* pueden ser intensionales (e.e. puede haber propiedades diferentes que se apliquen exactamente a las mismas cosas), pero los *conjuntos* de cosas que las satisfacen no lo son. Así, los conjuntos

{x / x es un número primo mayor que 2 y menor que 8}
{x / x es un número impar mayor que 2 y menor que 8}

son el mismo conjunto, y también son idénticos los conjuntos

{x / x es un animal racional}
{x / x es un bípedo implume}

Esta identidad es, como se ha advertido, independiente de que las propiedades *ser un número primo (entre 2 y 8)* y *ser un número impar (entre 2 y 8)*, o *ser un animal racional* y *ser un bípedo implume*, sean diferentes. Por otro lado, debe notarse que de la extensionalidad de los conjuntos se sigue que:

— no importa el orden en que se presenten los elementos de un conjunto cuando lo nombramos por extensión: {a,b,c} es el mismo conjunto que {c,a,b};

— los eventuales elementos "repetidos" al nombrar el conjunto por extensión "sobran": los conjuntos {1,2,3,2,7} y {1,2,3,7} son el mismo.

CONJUNTO VACÍO

Aunque intuitivamente un conjunto es una "colección" de cosas y no es claro que haya colecciones vacías en sentido intuitivo, es esencial para la teoría poder disponer de un conjunto que no tenga elementos. Por tanto, un conjunto no es lo que intutivamente se entiende por *colección* o *agregado*, pues no existen agregados vacíos, pero sí conjuntos vacíos. Por lo

mismo, un agregado de un objeto no es diferente del objeto mismo, pero un conjunto con un único elemento sí se suele considerar, en general, diferente de dicho elemento (aunque en esto la teoría puede ser más liberal):

Para todo x: $x \neq \{x\}$

¿Qué tipos de entidades son entonces los conjuntos, para que sean extensionales pero no meros agregados? No discutiremos aquí esta cuestión. Basta por ahora constatar estas características y, con ello, la posibilidad de conjuntos vacíos, sin elementos. Definiremos entonces la propiedad que puede tener un conjunto de ser vacío y después veremos fácilmente que dos conjuntos con la propiedad de ser vacíos han de ser el mismo conjunto.

DEF Un conjunto es *vacío* si no tiene elementos, si ningún objeto le pertenece: A es *vacío* syss_{def} para todo x: $x \notin A$

Es fácil ver que de esta definición, y del axioma de extensionalidad, se sigue que dos conjuntos que sean vacíos son el mismo conjunto. En efecto, si ambos son vacíos, ambos tienen los mismos elementos, a saber, ningún elemento, y por el principio de extensionalidad serán el mismo conjunto. Esto demuestra que *si* hay algún conjunto vacío, sólo hay uno. Pero no demuestra que haya alguno. En realidad eso no se puede demostrar. Eso es simplemente una asunción básica, o principio primitivo, un *axioma* de la teoría:

Axioma del conjunto vacío: Existe algún conjunto vacío.

Como este axioma garantiza que hay al menos un conjunto vacío, y de la definición se sigue todos los conjuntos con esa propiedad han de ser idénticos, podemos concluir que hay exactamente un conjunto vacío. Puesto que hay uno y sólo uno, podemos dar un nombre a ese conjunto sin elementos. Lo denotaremos mediante el signo '∅':

DEF $\varnothing =_{\text{def}}$ el único conjunto que es vacío

Así pues, los conjuntos

$\{x/\, x \neq x\}$
$\{x/\, x$ es triángulo con cuatro lados$\}$
$\{x/\, x$ es un número mayor que $x\}$
$\{x/\, x$ es una persona nacida antes que $x\}$

y muchos otros son todos el mismo conjunto, el conjunto vacío.

2. Paradoja de Russell y separación

Hemos dicho más arriba que a los conjuntos se les puede nombrar por comprensión especificando una propiedad que cumplan todos y sólo

los elementos del conjunto. Pero también advertimos que ello no quiere decir que, dada una propiedad cualquiera $\varphi(x)$, exista siempre el conjunto de las cosas que tienen esa propiedad. De hecho, eso no puede ser así, so pena de incurrir en paradojas. La más famosa de estas paradojas que surgen de aceptar que para toda propiedad existe el conjunto de las cosas que la satisfacen es la *paradoja de Russell* (descubierta por Bertrand Russell en el sistema de Frege). Russell considera la propiedad "no ser miembro de sí mismo", esto es, $\varphi(x)$ en este caso es

$x \notin x$

Ésta es, en tanto que propiedad, una propiedad legítima, que se aplica a unas entidades y no se aplica a otras. Por ejemplo, se aplica a Rocinante, pues Rocinante no es miembro de sí mismo, pues es un caballo y no un conjunto, y sólo los conjuntos pueden tener elementos. Así pues, todos los objetos que no sean conjuntos tendrán esa propiedad. Pero también algunos conjuntos pueden tenerla. Por ejemplo, el conjunto de las sillas. Este conjunto tiene elementos, todas y cada una de las sillas. Pero no se pertenece a sí mismo, no es elemento de sí mismo pues él mismo es un conjunto, no una silla, y sus elementos son sólo sillas. Y también parece, en principio, que algunos otros conjuntos sí tienen esta propiedad. Por ejemplo, el conjunto de las cosas que no son sillas. Este conjunto tiene como elementos todas y sólo las cosas que no son sillas. Pero él mismo no es una silla (es un conjunto), por lo que será uno de sus elementos. O el conjunto *universal*, esto es, *el conjunto de todas las cosas*, $\{x/\ x=x\}$, pues él mismo es una cosa. Así pues, parece que tenemos una propiedad que se aplica a unos objetos y no se aplica a otros. Consideremos ahora que aceptamos la idea de que para cualquier propiedad existe el conjunto de las cosas a las que se aplica. Esto es, para cualquier $\varphi(x)$ existe $\{x/\ \varphi(x)\}$. Si eso fuese así, debería existir entonces el conjunto de las cosas que no son miembros de sí mismas, esto es, debería existir el conjunto

$\{x/\ x \notin x\}$

Pero Russell mostró que este conjunto no puede existir. En efecto, supongamos que existe. Para abreviar digamos que este conjunto es el conjunto R ($R=\{x/\ x \notin x\}$). Puesto que R es una cosa (en particular, un conjunto), podemos preguntarnos, como hacíamos respecto de todo lo demás, si R tiene esa propiedad, esto es, si R se pertenece a sí mismo o no. Supongamos que R se pertenece a sí mismo, e.e. $R \in R$. Entonces R tiene la propiedad que tienen todas las cosas que están en R, a saber, no pertenecerse a sí mismo. Así pues, si $R \in R$ entonces $R \notin R$. Por tanto R no puede pertenecerse a sí mismo. Bien, supongamos ahora que R no se pertenece a sí mismo, e.e. $R \notin R$. Pero esa es justamente la propiedad que hace que algo esté en R, pues algo está en R si no se pertenece a sí mismo. Así pues, si $R \notin R$ entonces $R \in R$. Resumiendo: $R \in R$ syss $R \notin R$, lo que constituye simplemente una contradicción. Así pues, aceptar la existencia de dicho conjunto (si no se modifica nada más) nos conduce a una contradicción.

La paradoja Russell provocó un replanteamiento profundo de las ideas básicas de la teoría de conjuntos y se propusieron varias alternativas para desarrollar una teoría libre de paradojas pero que preservara lo máximo de las ideas intuitivas. El propio Russell propuso unas restricciones en el lenguaje formal que exigen, aproximadamente, que el signo '$\in$' esté flanqueado por (nombres de) entidades de *diferente tipo* (si a su izquierda hay un individuo, a su derecha debe haber un conjunto de individuos; si a su izquierda hay un conjunto de individuos, a su derecha debe haber un conjunto de conjuntos de individuos; etc.). El desarrollo de esta idea es la famosa *Teoría de Tipos* de Russell. No podemos ahora presentarla siquiera simplificadamente, pero tiene la consecuencia de que '$x \in x$' está excluido por la gramática de ese lenguaje, no significa nada, y por tanto '$x \notin x$' tampoco. Otra posible restricción es no permitir la existencia de ciertos conjuntos, como el de las cosas que no se pertenecen a sí mismas (y otros igual de problemáticos, como el universal). Eso se hace por el expediente de ir aceptando como conjuntos existentes los que los axiomas vayan diciendo, y no incluir axiomas de los que se siga la existencia de esos conjuntos problemáticos. Esta es la línea seguida por Zermelo y Fraenkel. Una variación de esta idea consiste en aceptar la existencia de cualquier conjunto para cualquier propiedad, pero distinguir dos tipos de conjuntos: los conjuntos *normales*, que pueden ser miembros de otros; y los conjuntos *no normales* (o *clases últimas*), que no pueden ser miembros de otros. En este caso, los axiomas estipulan qué conjuntos son normales, y lo hacen de modo tal que de los axiomas que se dan se sigue que esos conjuntos problemáticos no son normales. Esta es la opción que siguen von Neumann, Bernays y Gödel.

Nosotros no vamos a presentar la teoría rigurosamente, como sistema axiomático de forma rigurosa, sino informal o intuitivamente, aunque haremos referencias esporádicas a los axiomas (como hemos hecho ya con el de extensionalidad y el de el conjunto vacío). Por ello, no precisaremos de las herramientas formales que la solución a la paradoja (en alguna de estas alternativas) requiere. Aun así, y sin que en adelante insistamos mucho más en ello, vamos a comentar muy brevemente el *axioma de separación*, que en versiones parecidas usan las dos últimas propuestas. La idea es que (en la versión ZF) no se puede aceptar sin más que dada una propiedad existe el conjunto de las cosas que tienen dicha propiedad (o que dicho conjunto es normal, en la versión NBG). Así, en general, no es aceptable usar propiedades para obtener conjuntos (o conjuntos normales). Pero no hay nada malo en usar una propiedad cualquiera φ para, *si ya disponemos de un conjunto* (o de un conjunto *normal*, en NBG) "separar" de él los elementos suyos que además cumplan la propiedad φ en cuestión. Esto es, no hay ningún problema en aceptar la existencia (o normalidad) de *otro* conjunto formado por los elementos del primero (cuya existencia se considera ya disponible) *que además tienen la propiedad* φ. La idea es que, *si* disponemos ya de una entidad aproblemática, *cualquier* propiedad nos permite seleccionar una "parte" de dicha entidad aproblemática, siendo la parte así obtenida también aproblemática. Esto es lo que dice el principio o axioma de separación (que presentamos en la versión ZF):

Axioma de separación:

Dado un conjunto cualquiera A y una condición cualquiera φ, existe el conjunto de los elementos de A que cumplen la condición φ: $\{x / x \in A \text{ y } \varphi(x)\}$.

3. Inclusión, subconjuntos y conjunto potencia

Inclusión e inclusión estricta

Los conjuntos pueden estar en diversas relaciones entre sí. Por ejemplo, dados dos conjuntos A y B puede ocurrir que todos los objetos que están en A estén también en B, o que no lo esté ninguno, o que estén unos pero no otros. De los dos últimos casos nos ocuparemos más adelante. Cuando ocurre lo primero, se dice que el conjunto A está *incluido* en, o es un *subconjunto* de, B, y denotamos esta relación mediante el signo '$\subseteq$':

DEF $A \subseteq B$ syss$_{\text{def}}$ para todo x: si $x \in A$ entonces $x \in B$.

Así, por ejemplo,

$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,5\}$
$\{1,2,3,5\} \subseteq \{1,2,3,5\}$
$\{x / x$ es un número primo menor que $10\} \subseteq \{x / x$ es un número primo$\}$

pero

$\{1,2,8\} \not\subseteq \{1,2,3,5\}$
$\{x / x$ es un número menor que $10\} \not\subseteq \{x / x$ es un número primo$\}$

Como se habrá advertido, todo conjunto está incluido en sí mismo. Cuando los elementos de A están en B pero B tiene elementos que no están en A decimos que A está *incluido estrictamente* en, o que es un *subconjunto propio* de, B, y denotamos esta relación mediante '$\subset$':

DEF $A \subset B$ syss$_{\text{def}}$ $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Así, por ejemplo,

$\{1,2\} \subset \{1,2,3,5\}$

pero

$\{1,2,3,5\} \not\subset \{1,2,3,5\}$.

Es fácil mostrar que la inclusión y la inclusión estricta tienen las siguientes propiedades:

(1) Para todo A: $A \subseteq A$
(2) Para todo A: $\emptyset \subseteq A$
(3) Para ningún A: $A \subset A$
(4) Para todo A: $A \subseteq \emptyset$ syss $A = \emptyset$

(5) Para todo A: si $A \neq \varnothing$ entonces $\varnothing \subset A$
(6) Para todo A,B: $A=B$ syss $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
(7) Para todo A,B: $A \subset B$ syss $A \subseteq B$ y no $B \subseteq A$
(8) Para todo A,B,C : si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$
(9) Para todo A,B,C : si $A \subseteq B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$
(10) Para todo A,B,C : si $A \subset B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subset C$

CONJUNTO POTENCIA

Para ciertos fines, es útil poder hablar de *todos* los subconjuntos de un conjunto dado. Para ello introduciremos la noción de *conjunto potencia* o *conjunto de las partes* de un conjunto. El conjunto potencia, o conjunto de las partes, de un conjunto A, que denotaremos mediante 'Pot A', es el conjunto consistente en todos los subconjuntos de A:

(Este es uno de los conjuntos que no son peligrosos y del que es bueno disponer en la teoría, pero que no se pueden extraer por separación a partir del conjunto original A. Por ello su introducción requiere un axioma que diga que, dado un conjunto A, existe otro conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A).

DEF Pot $A =_{\text{def}} \{B \,/\, B \subseteq A\}$

Así, por ejemplo,

Pot $\{1,2\} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
Pot $\{a\} = \{\varnothing, \{a\}\}$
Pot $\varnothing = \{\varnothing\}$
Pot $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
Pot (Pot $\{\varnothing\}$) = Pot $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Los siguientes hechos, que involucran esta nueva operación, son también fáciles de establecer:

(11) Para todo A: $A \in$ Pot A
(12) Para todo A: $\varnothing \in$ Pot A
(13) Para todo A,B: Pot A = Pot B syss $A=B$

EJERCICIOS: 1 a 3.

4. Operaciones básicas

Dados ciertos conjuntos podemos formar otros combinando los elementos de los primeros de diversos modos específicos. Estos modos de obtener unos conjuntos a partir de otros son las *operaciones entre conjuntos*; una operación conjuntista es pues un modo de obtener un nuevo conjunto a partir de otro u otros ya disponibles (de hecho, ya hemos presentado una operación conjuntista, Pot, pues a partir de un conjunto Pot genera otro).

INTERSECCIÓN, UNIÓN, DIFERENCIA

Las operaciones más comunes son la *intersección*, la *unión* y la *diferencia*, operaciones a las que denotamos, respectivamente, mediante '$\cap$', '$\cup$' y ' - '. Estas operaciones son *binarias*, esto es, modos de obtener un nuevo conjunto a partir de *dos* conjuntos de los que se dispone previamente.

La *intersección* $A \cap B$ de dos conjuntos A y B es un nuevo conjunto que tiene por elementos los elementos comunes a A y a B:

DEF $A \cap B =_{def} \{x \,/\, x \in A$ y $x \in B\}$.

La *unión* $A \cup B$ de dos conjuntos A y B es un nuevo conjunto que tiene por elementos tanto los elementos de A como los elementos de B, esto es, los elementos que están en A o en B.

DEF $A \cup B =_{def} \{x \,/\, x \in A$ o $x \in B\}$.

La *diferencia* A-B de dos conjuntos A y B es un nuevo conjunto que tiene por elementos los elementos de A que no pertenecen a B:

DEF $A\text{-}B =_{def} \{x \,/\, x \in A$ y $x \notin B\}$.

La intersección y la diferencia dan lugar a subconjuntos de alguno de los originales, por lo que su existencia está garantizada por el axioma de separación. Pero nótese que la unión no se puede obtener "separándola" de ninguno de los conjuntos originales, por lo que es necesario un axioma que nos diga que dados dos conjuntos existe otro que tiene por elementos los que están en alguno de los anteriores.

EJEMPLO: $A = \{1,3,5,7\}$ y $B = \{3,4,5,6\}$:
$A \cap B = \{3,5\}$
$A \cup B = \{1,3,4,5,6,7\}$
$A\text{-}B = \{1,7\}$
$B\text{-}A = \{4,6\}$

EJEMPLO: $A = \{x \,/\, x$ es un número primo$\}$ y $B = \{x \,/\, x$ es un número par$\}$.
$A \cap B = \{x \,/\, x$ es un número primo par$\} = \{2\}$
$A \cup B = \{x \,/\, x$ es un número primo o par$\}$
$A\text{-}B = \{x \,/\, x$ es un número primo no par$\} = \{x \,/\, x$ es un número primo impar$\}$
$B\text{-}A = \{x \,/\, x$ es un número par no primo$\} = \{x \,/\, x$ es un número par diferente de 2$\}$.

Con ayuda de estas operaciones es posible formalizar en lenguaje conjuntista cierto tipo de enunciados del lenguaje natural. Además, combinando esta formalización con un procedimiento de decisión mediante diagramas, es posible decidir la validez/invalidez de los argumentos del lenguaje natural que involucran ese tipo de enunciados. Todo ello se explica en el último capítulo.

Vamos a ver ahora algunas de las propiedades que tienen estas operaciones (además de constatarlas intuitivamente, el lector puede compro-

bar muchas de ellas por el procedimiento de representación mediante diagramas que se presenta en el último capítulo):

(14) Para todo A,B: $A \cap B \subseteq A$
(15) Para todo A: $A \cap A = A$
(16) Para todo A: $A \cap \varnothing = \varnothing$
(17) Para todo A,B: $A \cap B = B \cap A$
(18) Para todo A,B,C: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(19) Para todo A,B: $A \subseteq B$ syss $A \cap B = A$

(20) Para todo A,B: $A \subseteq A \cup B$
(21) Para todo A: $A \cup A = A$
(22) Para todo A: $A \cup \varnothing = A$
(23) Para todo A,B: $A \cup B = B \cup A$
(24) Para todo A,B,C: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(25) Para todo A,B: $A \subseteq B$ syss $A \cup B = B$

(26) Para todo A,B: $A\text{-}B \subseteq A$
(27) Para todo A: $A\text{-}A = \varnothing$
(28) Para todo A: $A\text{-}\varnothing = A$
(29) Para todo A: $\varnothing\text{-}A = \varnothing$
(30) NO para todo A,B: $A\text{-}B = B\text{-}A$
(31) NO para todo A,B,C: $A\text{-}(B\text{-}C) = (A\text{-}B)\text{-}C$
(32) Para todo A,B: $A \subseteq B$ syss $A\text{-}B = \varnothing$

(33) Para todo A,B,C: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(34) Para todo A,B,C: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(35) Para todo A,B,C: $A\text{-}(B \cap C) = (A\text{-}B) \cup (A\text{-}C)$
(36) Para todo A,B,C: $A\text{-}(B \cup C) = (A\text{-}B) \cap (A\text{-}C)$
(37) Para todo A,B,C: $(A \cap B)\text{-}C = (A\text{-}C) \cap (B\text{-}C)$
(38) Para todo A,B,C: $(A \cup B)\text{-}C = (A\text{-}C) \cup (B\text{-}C)$

GRAN INTERSECCIÓN, GRAN UNIÓN

A veces queremos disponer de intersecciones y uniones *generalizadas*, esto es, de la intersección de toda una serie de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, que será el conjunto de elementos comunes a todos, o de la unión de toda una serie de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, que será el conjunto con todos los elementos involucrados. Para ello se hace lo siguiente: se supone que las series de conjuntos (que queremos intersectar o unir) conforman un conjunto y se introducen como operaciones nuevas la *gran intersección* de un conjunto y la *gran unión* de un conjunto. La gran intersección de un conjunto A, que denotaremos mediante 'Gr$\cap$ A', será el conjunto de todos los elementos comunes a los elementos de A. La gran unión de un conjunto A, que denotaremos mediante 'Gr$\cup$ A', será el conjunto de todos los elementos que estén en algún elemento de A.

DEF Gr$\cap$ $A =_{\text{def}} \{x$ / para todo B: si $B \in A$ entonces $x \in B\}$

DEF Gr∪ A $=_{def}$ {x / hay algún B tal que $B \in A$ y $x \in B$ }

Nótese que la definición de gran intersección queda indeterminada si A es el ∅, pues entonces no hay Bs que pertenezcan a A (en realidad, más que indeterminada sería problemática, pues resultaría el conjunto universal, del que no disponemos en nuestra teoría). Para resolver esta dificultad, habría que modificar la definición del siguiente modo: Si $A \neq \emptyset$, entonces .... (tal como está); y si $A = \emptyset$ entonces Gr∩A=∅.). (Por motivos parecidos a los que comentamos antes con la intersección y la unión, ahora hará falta un nuevo axioma para garantizar la existencia de la gran unión, y con él tendremos también garantizada la existencia de la gran intersección, pues como muestra la primera de las siguientes propiedades, la gran intersección está incluida en la gran unión.)

Las siguientes propiedades son también obvias:[1]

(39) Para todo A: Gr∩ A ⊆ Gr∪ A
(40) Para todo A,B: $A \cap B$ = Gr∩ {A,B}
(41) Para todo A,B: $A \cup B$ = Gr∪ {A,B}

EJERCICIOS: 4 a 10.

Ejercicios

Sean:

A_1 = {1,2,3}
A_2 = {a,b,c,d,e}
A_3 = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
A_4 = {3}
A_5 = {2,4,6,8,10}
A_6 = ∅
A_7 = A = {x / x es una letra del abecedario}
A_8 = V = {x / x es una vocal}
A_9 = C = {x / x es una consonante}
A_{10} = H = {x / x es humano}
A_{11} = M = {x / x es varón}
A_{12} = F = {x / x es fémina}
A_{13} = L = {x / x es libro}
A_{14} = E = {x/ x es escritor}
A_{15} = N = {x/ x es n° natural}
A_{16} = Z = {x/ x es n° entero}
A_{17} = Q = {x/ x es n° racional}
A_{18} = R = {x/ x es n° real}

1. Las proposiciones (40) y (41) muestran que disponiendo de la gran unión y la gran intersección podríamos prescindir, respectivamente, de la unión y de la intersección (la inversa no es cierta, pues la gran unión/gran intersección de un conjunto *infinito* de conjuntos no se puede obtener a partir de la unión/intersección).

A_{19} = I {x/ x es nº impar}
A_{20} S {x/ x es nº múltiplo de 5}

1 Determinar entre cuáles de ellos se da la inclusión.

2 Determinar entre cuáles de ellos se da la inclusión estricta.

3 Hallar el conjunto de las partes de A_1 , A_4 y A_6.

Hallar:

4 $A_i \cup A_{i+1}$ (para i entre 1 y 19) y $A_{20} \cup A_1$.
5 $A_i \cap A_{i-1}$ (para i entre 2 y 20) y $A_1 \cap A_{20}$.
6 $A_i - A_{i+2}$ (para i entre 1 y 18), $A_8 - A_2$, $A_2 - A_9$ y $A_2 - A_7$.
7 $((A_1 \cap A_5) \cup A_4) - A_3$
8 $(A_7 - (A_8 \cup A_9)) \cap A_2$
9 $(A_{16} - A_{15}) \cap A_{18}$
10 $A_{17} - (A_{19} \cap A_{20})$

Capítulo 12

RELACIONES

1. Pares ordenados y producto cartesiano

Pares ordenados

Los conjuntos en general se identifican sólo por los elementos que los integran, sin importar el orden en que se consideran tales elementos. Así, el conjunto de las letras de esta página es el mismo tal como están que cambiándolas de posición. En general, y si nos limitamos provisionalmente a conjuntos con sólo dos elementos, el conjunto $\{x,y\}$ es el mismo conjunto que el conjunto $\{y,x\}$. O de otro modo, si $\{x,y\}=\{z,t\}$, no podemos asegurar que $x=z$ y $y=t$. Puesto que en los conjuntos usuales el orden de los elementos no altera el conjunto, lo único que se sigue de $\{x,y\} = \{z,t\}$ es

$(x=z$ y $y=t)$ o $(x=t$ y $y=z)$.

Sin embargo, como veremos a continuación, a veces es necesario referirse a conjuntos de elementos en los que sí se quiere que importe el orden. Para indicar que el orden de los elementos importa, utilizamos el signo '$< ... >$'. Para dos objetos, hablaremos del *par ordenado* $<x,y>$; para tres objetos, del *trío ordenado* $<x,y,z>$; y en general, para n objetos, de la *n-tupla ordenada* $<x_1,x_2,...,x_n>$.

La propiedad fundamental de los pares ordenados es que en ellos sí ocurre que

$<x,y>=<z,t>$ syss $x=z$ y $y=t$.

Esta propiedad se puede obtener definiendo los pares ordenados como conjuntos binarios (pares "desordenados") de cierto tipo. Hay varias alternativas, todas con la misma consecuencia; la más usual es:

DEF $<x,y>=_{def}\{\{x\},\{x,y\}\}$

El lector puede comprobar que, así definidos, los pares tienen efectivamente la propiedad deseada. Y también es sencillo establecer que los pares ordenados son subconjuntos del conjunto potencia del par no ordenado correspondiente:

(42) Para todo x, y: $<x,y> \subseteq$ Pot $\{x,y\}$

(Por tanto, *si* existe el conjunto $\{x,y\}$, entonces existe también el conjunto $<x,y>$; pues si existe $\{x,y\}$ el axioma de las partes garantiza que existe Pot $\{x,y\}$, y por tanto (por el axioma de separación) existe también $<x,y>$, que es subconjunto suyo. Otra cosa es si dados dos objetos x e y podemos asegurar que existe el par desordenado formado por ambos $\{x,y\}$. Para garantizar ese hecho deseable, y no peligroso, se introduce un nuevo axioma, el *axioma del par*.)

Una vez hemos definido los pares ordenados, es sencillo definir el resto de tuplas. Los tríos ordenados, por ejemplo, se pueden entonces definir así:

DEF $<x,y,z> =_{def} <<x,y>, z>$.

Y de modo similar con las restantes tuplas. A partir de ahora nos limitaremos en general, para simplificar, a ejemplos binarios, pero todo lo que se diga se puede generalizar a tuplas cualesquiera.

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, a ciertos efectos es útil disponer del conjunto completo de todos los pares ordenados posibles cuyo primer miembro pertenece a A y cuyo segundo miembro pertenece a B. A este conjunto se le denomina el *producto cartesiano* de A y B, y se le denota mediante '$A\times B$'. Formalmente este conjunto es el resultado de realizar una operación entre ambos conjuntos:

DEF $A\times B =_{def} \{<x,y> / x\in A$ y $y\in B\}$.

EJEMPLO:
$A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$
$A\times B = \{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>,<3,a>,<3,b>\}$

$V = \{x / x$ es un varón$\}$ y $M = \{x / x$ es una mujer$\}$
$V\times M = \{<x,y> / x$ es un varón y y es una mujer$\}$.

El lector puede utilizar (42) para comprobar que el producto cartesiano de dos conjuntos está incluido en el conjunto potencia del conjunto potencia de su unión:

(43) Para todo A, B: $A\times B \subseteq$ Pot Pot $(A\cup B)$

(Por tanto, puesto que los axiomas anteriores aseguran que dados dos conjuntos cualesquiera existe su unión, y que dado un conjunto cualquiera existe su conjunto potencia, garantizan también que dados dos conjuntos existe su producto cartesiano.)

Aunque, como es sencillo comprobar, el producto cartesiano no es conmutativo ni asociativo, sí que es distributivo, tanto por la derecha como por la izquierda, con la intersección, la unión y la diferencia:

(44) Para todo A,B: $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
(45) Para todo A,B: $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$
(46) Para todo A,B: $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
(47) Para todo A,B: $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$
(48) Para todo A,B: $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$
(49) Para todo A,B: $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$

El producto cartesiano de tres conjuntos *A*, *B* y *C* es el conjunto de todos los tríos ordenados tales que el primer miembro es de *A*, el segundo miembro es de *B* y el tercero es de *C*. Y análogamente con los productos cartesianos de cuatro o más conjuntos.

2. **Relaciones. Dominio, recorrido y campo**

RELACIONES

Una relación *R* es cualquier conjunto de pares ordenados, o en general de tuplas ordenadas: si es un conjunto de pares, la relación es *binaria*; si es un conjunto de tríos, la relación es *ternaria*; y en general, si es un conjunto de *n*-tuplas, la relación es *n*-aria (por tanto, todo producto cartesiano de *n* conjuntos es una relación *n*-aria). Así pues, un conjunto cualquiera será una relación cuando todos sus miembros sean pares ordenados (como los tríos se definen como cierto tipo de pares, y lo mismo el resto de las tuplas, esta definición se aplica correctamente a relaciones de cualquier ariedad).

DEF A es una *relación* syss_{def} para todo $x\in A$: hay y, z tales que $x = \langle y,z\rangle$.

EJEMPLO:
Son relaciones:
$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$
$S=\{\langle x,y\rangle$ / *x* es un varón, *y* es una mujer y *x es padre de y*$\}$
$\varnothing$
No lo son:
$T=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 3,b\rangle, 1\}$
$U=\{\langle x,y\rangle$ / *x* es un varón, *y* es una mujer y *x es padre de y*$\} \cup$ {Platón}

En adelante simplificaremos la escritura de relaciones como *S* del siguiente modo:
$S=\{\langle x,y\rangle\in V\times M$ / *x es padre de y*$\}$
siendo $V=\{x/$ *x* es varón$\}$ y $M=\{x/$ *x* es mujer$\}$. Esto es, *S* es la relación que contiene los elementos del producto cartesiano $V\times M$ tales que el primer miembro es padre del segundo.[1]

1. Nótese que, en tanto que entidades conjuntistas, las relaciones son entidades *extensionales*, pues son *conjuntos* (de pares). Por tanto, en tanto que entidades conjuntistas, "ser padre de" aplicado al total de los humanos es una relación diferente de "ser padre de" aplicado, p.e., sólo a los europeos; y análogamente, p.e., con "ser menor que" aplicado a los naturales y a los reales.

Relación identidad

Una relación especial que se utiliza a veces es *la relación identidad sobre un conjunto,* o *relación diagonal* (por coincidir con la "diagonal" del producto cartesiano del conjunto por sí mismo). La relación identidad sobre un conjunto A, y que denotaremos mediante 'I_A', no es más que el conjunto de todos los pares ordenados "idénticos" constituidos por elementos de A, esto es, en los que ambos miembros son idénticos:

DEF $I_A = \{<x,x> / x \in A\}$

EJEMPLO:
$A=\{1,a,\#\}$
$I_A = \{<1,1>,<a,a>,<\#,\#>\}$

$H=\{x/ x$ es humano$\}$
$I_H = \{<x,y> \in H \times H / x=y\} = \{<x,x> / x$ es humano$\}$

DOMINIO, RECORRIDO Y CAMPO

Cuando tenemos una relación, muchas veces queremos referirnos al conjunto de todos los individuos que ofician de primeros miembros de los pares, o al de los segundos, o al de ambos. Para ello se acuñan las siguientes nociones.

El *dominio* de una relación binaria R, que denotaremos mediante 'Dom R', es el conjunto de todos los primeros miembros de los pares de R:

DEF Dom $R =_{\text{def}} \{x /$ existe algún y tal que $<x,y> \in R\}$.

El *recorrido* (o *contradominio*) de una relación binaria R, que denotaremos mediante 'Rec R', es el conjunto de todos los segundos miembros de los pares de R:

DEF Rec $R =_{\text{def}} \{x /$ existe algún y tal que $<y,x> \in R\}$.

El *campo* de una relación R, que denotaremos mediante 'Cam R', es el conjunto de todos los (primeros y segundos) miembros de los pares de R, esto es, la unión del dominio y el recorrido:

DEF Cam $R =_{\text{def}}$ (Dom R) $\cup$ (Rec R).

EJEMPLO: $R= \{<1,a>,<1,b>,<3,b>\}$
Dom $R = \{1,3\}$
Rec $R = \{a,b\}$
Cam $R = \{1,3,a,b\}$

EJEMPLO: $S = \{<x,y> \in V \times M / x$ *es padre de* $y\}$
Dom $S = \{x / x$ es un varón y x es padre de alguna mujer$\}$ $(\neq V)$
Rec $S = \{x/ x$ es una mujer y algún varón es padre de $x\}$ $(= M)$
Cam $S = \{x/ x$ es un varón y padre de alguna mujer, o x es una mujer (que tiene por padre algún varón)$\}$.

Nótese que, aunque estas nociones están pensadas para aplicarse a relaciones, se pueden aplicar a conjuntos cualesquiera. Si el conjunto no tiene pares ordenados, el dominio, el recorrido y el campo son simplemente el conjunto vacío. Pero hay conjuntos que no son relaciones y cuyos dominio, recorrido y campo no son vacíos: cualquiera que tenga pares, aunque no sólo pares (p.e. T y U del ejemplo).

EJERCICIOS: 11

3. **Operaciones entre relaciones**

Las relaciones son cierto tipo de conjuntos, conjuntos de pares (o en general tuplas) ordenados. En tanto que conjuntos, a ellas se aplican las operaciones generales entre conjuntos (unión, intersección, etc.). Pero además, en tanto que conjuntos de tuplas, se pueden definir para ellas ciertas operaciones especiales. Las más comunes, y útiles, son la *restricción* a determinado conjunto, la *imagen* bajo un conjunto, la *conversa* (o *inversa*) y el *producto relativo*. Para simplificar, nos limitaremos a relaciones binarias, e.e. a conjuntos de pares ordenados.

RESTRICCIÓN E IMAGEN

La *restricción* de una relación R respecto de un conjunto cualquiera A, que se denota mediante '$R|A$', es una nueva relación formada por los pares de R cuyo primer miembro es elemento de A:

DEF $R|A =_{def} \{<x,y> / <x,y> \in R \text{ y } x \in A\}$.

La *imagen* de una relación R bajo un conjunto A, que denotaremos mediante '$R[A]$', es el conjunto de los segundos miembros de los pares de R cuyo primer miembro pertenece a A, esto es, el recorrido de $R|A$:

DEF $R[A] =_{def} \{y$ / existe algún x tal que $<x,y> \in R$ y $x \in A\} = \text{Rec } R|A$.

EJEMPLO: $R = \{<1,a>,<2,b>, <2,c>, <3,c>\}$ y $A = \{1,3,5,7\}$
$R|A = \{<1,a>,<3,c>\}$
$R[A] = \{a,c\}$

EJEMPLO: $S = \{<x,y> / x$ es un libro escrito por $y\}$ y $B = \{x / x$ es una novela policiaca$\}$
$S|B = \{<x,y> / x$ es una novela policiaca escrita por $y\}$
$S[B] = \{x / x$ ha escrito alguna novela policiaca$\}$.

CONVERSA

La relación *conversa* (o *inversa*) de una relación R, que denotamos mediante 'R^{-1}', es la relación R "dada la vuelta", esto es, la relación cuyos pares son los pares de R "invertidos", intercambiando sus miembros:

DEF $R^{-1} =_{def} \{<x,y> / <y,x> \in R\}$.

EJEMPLO: $R = \{<1,a>,<2,b>, <2,c>, <3,c>\}$
$R^{-1} = \{<a,1>,<b,2>,<c,2>,<c,3>\}$

EJEMPLO: $S = \{<x,y> / x$ es un libro escrito por $y\}$
$S^{-1} = \{<x,y> / x$ ha escrito el libro $y\}$

EJEMPLO: $T = \{<x,y> / x$ es progenitor de $y\}$
$T^{-1} = \{<x,y> / x$ es hijo/a de $y\}$

PRODUCTO RELATIVO

El *producto relativo* de dos relaciones *R* y *S*, que denotaremos mediante 'R/S', es la relación "puente" entre *R* y *S*. Es una nueva relación formada por los pares $<x,y>$ tales que *x* es el primer miembro de un par de *R* cuyo segundo miembro es el primer miembro de un par de *S* que tiene *y* como segundo miembro; o más coloquialmente, *x* tiene a su derecha en *R* algo que está a la izquierda de *y* en *S*. Por tanto:

DEF $R/S =_{def} \{<x,y> /$ hay algún z tal que $<x,z> \in R$ y $<z,y> \in S\}$.

EJEMPLO: $R = \{<1,a>,<2,b>,<3,c>,<3,e>\}$ y $S = \{<a,a>,<a,d>,<cb>,<d,a>,<d,d>,<d,e>\}$
$R/S = \{<1,a>, <1,d>, <3,b>\}$
$S/R = \varnothing$

EJEMPLO: $T = \{<x,y> / x$ es primo de $y\}$ y $U = \{<x,y> / x$ es hijo de $y\}$
$T/U = \{<x,y> / x$ es primo de alguien que es hijo de $y\} = \{<x,y> / x$ es sobrino de $y\}$
$U/T = \{<x,y> / x$ es hijo de un primo de $y\}$.

EJERCICIOS: 12 a 17

4. Propiedades de las relaciones

Las relaciones, en tanto que conjuntos de pares, pueden tener propiedades, pueden ser de cierto tipo en función de qué les ocurra a sus pares conjuntamente considerados. Por ejemplo, una relación puede ser tal que, siempre que tenga un par, tenga también su par opuesto (p.e. "ser hermano de"), o que no tenga nunca dos pares opuestos (p.e. "ser progenitor de"), o que todo elemento del campo esté relacionado consigo mismo (p.e. "ser tan o más alto que"). Las propiedades más destacadas son las siguientes:

REFLEXIVIDAD

Todo objeto del campo está relacionado consigo mismo:

DEF *R* es reflexiva syss$_{def}$ para todo x: si $x \in \text{Cam } R$ entonces $<x,x> \in R$.

IRREFLEXIVIDAD

Ningún objeto está relacionado consigo mismo:

DEF R es irreflexiva syss_{def} para todo x: $\langle x,x\rangle \notin R$.

SIMETRÍA

Para todo par de la relación, su par "converso" está también en la relación:

DEF R es simétrica syss_{def} para todo x,y: si $\langle x,y\rangle \in R$ entonces $\langle y,x\rangle \in R$.

ASIMETRÍA

Ningún par está invertido en la relación:

DEF R es asimétrica syss_{def} para todo x,y: si $\langle x,y\rangle \in R$ entonces $\langle y,x\rangle \notin R$.

ANTISIMETRÍA

Los únicos pares conversos, caso de haber alguno, son los "idénticos" (e.e. con ambos miembros idénticos); no hay dos pares *diferentes* invertidos:

DEF R es antisimétrica syss_{def} para todo x,y: si $\langle x,y\rangle \in R$ y $\langle y,x\rangle \in R$, entonces $x=y$.

TRANSITIVIDAD

La relación se "hereda"; siempre que un objeto esté relacionado con otro y éste lo esté con un tercero, el primero también está relacionado con el tercero:

DEF R es transitiva syss_{def} para todo x,y,z: si $\langle x,y\rangle \in R$ y $\langle y,z\rangle \in R$, entonces $\langle x,z\rangle \in R$.

INTRANSITIVIDAD

No hay *ninguna* secuencia "transitiva" de pares:

DEF R es intransitiva syss_{def} para todo x,y,z: si $\langle x,y\rangle \in R$ y $\langle y,z\rangle \in R$, entonces $\langle x,z\rangle \notin R$.

CONEXIÓN (DÉBIL)

Cualesquiera dos objetos del campo *diferentes* están relacionados (en un sentido u otro o en los dos):

DEF *R* es conexa syss_{def} para todo x,y: si $x \in \text{Cam } R$ y $y \in \text{Cam } R$ y $x \neq y$, entonces $\langle x,y \rangle \in R$ o $\langle y,x \rangle \in R$.

CONEXIÓN FUERTE

Cualesquiera dos objetos del campo están relacionados:

DEF *R* es fuertemente conexa syss_{def} para todo x,y: si $x \in \text{Cam } R$ y $y \in \text{Cam } R$, entonces $\langle x,y \rangle \in R$ o $\langle y,x \rangle \in R$.

EJEMPLO:
$R = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
Es reflexiva, antisimétrica, transitiva, conexa y fuertemente conexa.

$S = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
Es irreflexiva, simétrica e intransitiva.

$T = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$
Es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica, transitiva y conexa.

$U = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
No tiene ninguna de estas propiedades. No es reflexiva pues le falta, p.e., $\langle 1,1\rangle$. No es irreflexiva pues tiene $\langle 2,2\rangle$. No es simétrica pues, p.e., tiene el par $\langle 2,3\rangle$ pero no el $\langle 3,2\rangle$. No es asimétrica pues tiene p.e. el par $\langle 2,2\rangle$ y el par $\langle 2,2\rangle$; pero también tiene los pares $\langle 2,1\rangle$ y $\langle 1,2\rangle$, por lo que tampoco es antisimétrica. No es transitiva pues, p.e., tiene el $\langle 1,2\rangle$, el $\langle 2,3\rangle$ pero no el $\langle 1,3\rangle$. No es intransitiva pues tiene, p.e., el $\langle 1,2\rangle$, el $\langle 2,2\rangle$ y el $\langle 1,2\rangle$. No es conexa pues el 1 y el 3 no están relacionados en ningún sentido, y por tanto tampoco es fuertemente conexa.

$\varnothing$
Tiene todas las propiedades (pues hace falso el antecedente de todas las definiciones).

$V = \{\langle 1,2\rangle\}$
Es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica, transitiva, intransitiva (en este caso transitividad e intransitividad se cumplen ambas porque se cumplen vacuamente, por hacer falso el antecedente de ambas definiciones) y conexa.

$W = \{\langle 1,1\rangle\}$
Es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, conexa y fuertemente conexa.

$Q = \{\langle x,y\rangle \mid x$ e y tienen los mismos progenitores$\}$
Es reflexiva, simétrica y transitiva.

$P = \{\langle x,y\rangle \mid x$ es más alto que $y\}$
Es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica y transitiva.

$O = \{\langle x,y\rangle \mid x$ ama a $y\}$
No tiene ninguna de estas propiedades.

Los siguientes grupos de hechos muestran (i) qué relaciones se dan entre estas propiedades, (ii) cómo se comportan con las operaciones conjuntistas básicas, y (iii) cómo las podríamos las haber definido alternativamente usando nociones introducidas anteriormente:

(50) Para todo R: R es fuertemente conexa syss R es conexa y reflexiva.
(51) Para todo R: R es asimétrica syss R es irreflexiva y antisimétrica.
(52) Para todo R: Si R es reflexiva entonces no es asimétrica.
(53) Para todo R: Si R es simétrica y transitiva entonces es reflexiva.

(54) Para todo R, S: Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son.
(55) Para todo R, S: Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$, $R \cap S$ y R-S también lo son.
(56) Para todo R, S: Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ también lo es.

Para todo R: R es reflexiva syss $I_{\text{Cam } R} \subseteq R$
Para todo R: R es irreflexiva syss $I_{\text{Cam } R} \cap R = \emptyset$
(59) Para todo R: R es simétrica syss $R^{-1} = R$
Para todo R: R es asimétrica syss $R \cap R^{-1} = \emptyset$
(61) Para todo R: R es antisimétrica syss $R \cap R^{-1} \subseteq I_{\text{Cam } R}$
(62) Para todo R: R es transitiva syss $R/R \subseteq R$
(63) Para todo R: R es intransitiva syss $R \cap R/R = \emptyset$
(64) Para todo R: R es conexa syss $(\text{Cam } R \times \text{Cam } R) - I_{\text{Cam } R} \subseteq R \cup R^{-1}$
(65) Para todo R: R es fuertemente conexa syss $\text{Cam } R \times \text{Cam } R \subseteq R \cup R^{-1}$

EJERCICIOS: 18

5. **Relaciones de equivalencia y particiones**

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación de equivalencia relaciona individuos que son "equivalentes bajo cierto aspecto", como tener los mismo progenitores, haber nacido en el mismo país o ser del mismo sexo. Las relaciones de *equivalencia* se caracterizan por satisfacer determinadas propiedades: son reflexivas, pues todo individuo es "equivalente" (en el correspondiente respecto) a sí mismo; son simétricas, pues si un individuo equivale en cierto respecto a otro, éste también equivale en ese respecto a aquél; y son transitivas, pues la *equivalencia* (a diferencia de la mera *semejanza*) se "hereda", los equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí. Así pues, estas propiedades son las que definen las relaciones de equivalencia (nótese que, por (53), incluir, como es usual, la reflexividad en la definición es redundante, tal como hemos definido aquí la reflexividad):

DEF R es una relación de equivalencia syss$_{\text{def}}$ R es reflexiva, simétrica y transitiva.

EJEMPLO:
Son relaciones de equivalencia:

R = {<1,2>,<1,3>,<3,1>,<3,2>,<1,1>,<2,2>,<2,1>,<2, 3>,<3,3>,<4,4>}
S = {<1, 1>}
T = {<x,y> / x tiene los mismos progenitores que y}
U = {<x,y> / x ha nacido en el mismo país que y}
V = {<x,y> / x es del mismo sexo que y}
I = {<x,y> / $x = y$}.
No son relaciones de equivalencia:
W = {<1,2>,<2,1>,<1,1>}, pues aunque es reflexiva y simétrica no es transitiva.
Y = {<1,2>,<1,1>,<2,2>}, pues aunque es reflexiva y transitiva no es simétrica.
Z = {<1,2>,<1,3>,<3,2>,<2,4>, <2,3>,<3,4>}
Q= {<x,y> / x es tan o más alto que y}, pues es reflexiva y transitiva pero no simétrica.
P = {<x,y> / x comparte al menos un progenitor con y}, pues es reflexiva y simétrica pero no transitiva.
O = {<x,y> / x ama a y}, no es ni reflexiva, ni simétrica ni transitiva.

Las relaciones de equivalencia tienen el efecto de dividir el campo de objetos en "clases de equivalencia", en grupos disjuntos (e.e. cuya intersección es vacía) de individuos equivalentes bajo el correspondiente respecto; o como se dice técnicamente, generan *particiones* del campo. Para ver que ello es así, necesitamos antes los conceptos de *coclase* de un individuo bajo una relación y de *conjunto cociente* del campo bajo la relación.

COCLASE Y CONJUNTO COCIENTE

La *coclase* de un individuo x bajo la relación R, que denotaremos mediante '$[x]_R$', es simplemente el conjunto de individuos que x tiene a su derecha en R:

DEF $[x]_R =_{def} \{y \,/\, <x,y> \in R\}$

EJEMPLO: Sean las relaciones R y U las mismas que en el ejemplo anterior:
$[1]_R$ = {1, 2,3}
$[2]_R$ = {1,2,3}
$[3]_R$ = {1,2,3}
$[4]_R$ = {4}
$[\text{Picasso}]_U$ = {x / Picasso ha nacido en el mismo país que x}= {x / x ha nacido en España}
$[\text{Gaudí}]_U$ = {x / Gaudí ha nacido en el mismo país que x}= {x / x ha nacido en España}
$[\text{Proust}]_U$ = {x / Proust ha nacido en el mismo país que x}= {x / x ha nacido en Francia}

Nótese que esta noción es general; no se exige que la relación sea de equivalencia sino que está definida para cualquier relación.

EJEMPLO: Sean Z = {<1, 2>,<1,3>,<3, 2>,<2,4>, <2,3>,<3,4>} y O = {<x,y> / x ama a y}:

$[1]_Z = \{2,3\}$
$[2]_Z = \{3,4\}$
$[3]_Z = \{2,4\}$
$[4]_Z = \varnothing$
$[\text{Picasso}]_O = \{x \,/\, \text{Picasso ama a } x\}$.

Cuando la relación es de equivalencia, entonces a las coclases se las denomina *clases de equivalencia*. Y en ese caso, si dos individuos están relacionados entonces sus clases de equivalencia son la misma:

(66) Para todo x,y,R: si $<x,y>\in R$ y R es una relación de equivalencia, entonces $[x]_R = [y]_R$

El *conjunto cociente* de un conjunto A bajo una relación R, que denotaremos mediante '$[A]/R$', es el conjunto de todas las coclases de los individuos de A bajo la relación R:

DEF $[A]/R =_{\text{def}} \{ [x]_R \,/\, x\in A\}$.

Lo interesante, por lo general, es obtener conjuntos cocientes cuando el conjunto A es el campo de R, como en los dos primeros de los siguientes casos.

EJEMPLO: Sean R y Z como antes.
$[\{1,2,3,4\}]/Z = \{\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\},\varnothing\}$
$[\{1,2,3,4\}]/R = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$
$[\{1,2,3,4,5\}]/R = \{\{1,2,3\},\{4\}, \varnothing\}$

Particiones

Como se habrá observado en los ejemplos, el conjunto cociente del campo de una relación bajo dicha relación se puede considerar como una "división" del campo generada por la relación. Así, toda relación "divide" su campo agrupando los individuos entre sí de diverso modo. Pero, para la mayoría de las relaciones, como en el caso de Z, esa división es muy imperfecta, hasta el punto de que apenas cabe hablar propiamente de "división" genuina. Sólo con las relaciones de equivalencia tenemos la garantía de que la división generada es una "buena división". Este concepto de "buena división" (de un conjunto) es el que expresa la noción de *partición* (de un conjunto).

Una partición de un conjunto A es un conjunto de subconjuntos de A tales que: ningún individuo está en dos subconjuntos diferentes; todo individuo está en algún subconjunto; y ningún subconjunto es vacío:

DEF H es una partición de A syss_{def}
(i) para todo $B\in H$: $B\subseteq A$ y $B\neq\varnothing$
(ii) para todo B, $C\in H$: si $B\neq C$ entonces $B\cap C=\varnothing$
(iii) para todo $x\in A$: hay $B\in H$ tal que $x\in B$.

EJEMPLO:
$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ es una partición de $\{1,2,3,4\}$
$\{\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\},\varnothing\}$ no es partición de $\{1,2,3,4\}$
$\{\{1,2,3\},\{4\},\varnothing\}$ no es una partición de $\{1,2,3,4\}$
$\{\{1,2,3\},\{3,4\}\}$ no es una partición de $\{1,2,3,4\}$
$\{\{1,2\},\{4\}\}$ no es una partición de $\{1,2,3,4\}$
pero
$\{\{1,2\},\{4\}\}$ sí es una partición de $\{1,2,4\}$

Las particiones son, por tanto, las "buenas divisiones" de conjuntos y es inmediato que para cada conjunto (de dos o más elementos) puede haber varias. Hemos visto que una partición del conjunto $\{1,2,3,4\}$ es

$H_1=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$,

pero hay otras, por ejemplo

$H_2=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$
$H_3=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.

Cuando dos particiones diferentes son tales que los elementos de una son subdivisiones de los de la otra, decimos que la primera es *más fina* que la segunda:

DEF Sean H_1 y H_2 dos particiones de un mismo conjunto.
H_1 es más fina que H_2 syss$_{\text{def}}$ $H_1 \neq H_2$ y para todo $B \in H_1$ hay $C \in H_2$ tal que $B \subseteq C$.

De las particiones anteriores, por ejemplo, H_2 es más fina que H_1 pero H_3 no es ni más ni menos fina que H_1 ni que H_2.

Ahora podemos expresar el hecho mencionado acerca de las relaciones de equivalencia: toda relación de equivalencia genera una partición, a saber, el conjunto cociente de su campo bajo ella.

(67) Para todo R: si R es una relación de equivalencia, entonces $[\text{Cam } R]/R$ es una partición de Cam R.

Nótese que el sentido inverso no vale, pues puede haber relaciones que no sean de equivalencia cuyo conjunto cociente sí sea una partición del campo (p.e. $\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$). Pero lo distintivo de las relaciones de equivalencia es que ellas *siempre* generan particiones; de ellas sabemos en general que su conjunto cociente es una partición. En realidad, es prácticamente lo mismo hablar de relaciones de equivalencia que de particiones. Toda relación de equivalencia genera una partición, su conjunto cociente. Pero es fácil ver que también toda partición genera una relación de equivalencia. Llamaremos *relación asociada a un conjunto (de conjuntos) H*, y la denotaremos mediante 'R_H', a la relación que consiste en unir los productos cartesianos de cada elemento de H consigo mismo (nótese que está definida para conjuntos (de conjuntos) cualesquiera, no se exige que H sea una partición):

DEF $R_H = \{\langle x,y\rangle \ / \text{ hay } B\in H \text{ tal que } x\in B \text{ y } y\in B\}$

EJEMPLO:
$H = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$
$R_H = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$
$J = \{\{1,2\},\{3\}\}$
$R_J = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$

Es sencillo probar que, como muestra el segundo ejemplo, la relación asociada a una partición siempre es una relación de equivalencia:

(68) Para todo H: si H es una partición de A, entonces R_H es una relación de equivalencia, cuyo campo es A.

Como sugieren los ejemplos, también suele valer el sentido contrario; esto es, si H no es una partición entonces la relación asociada no es de equivalencia (sólo si es una partición, la relación así generada es una relación de equivalencia). Pero en algunos casos especiales eso no es cierto. Dada la definición que hemos dado de las relaciones asociadas (en lugar de utilizar los productos cartesianos), hay casos en los que un conjunto de conjuntos que no es una partición también genera una relación de equivalencia. Se trata de casos como

$\{\{1,2,3\},\{4\},\varnothing\}$

en el que lo único que falla para ser una partición es que algún elemento es vacío (compruebe el lector que la relación asociada a este conjunto sí es de equivalencia). Por tanto, el sentido inverso es más débil:

(69) Para todo H: si R_H es una relación de equivalencia, con Cam $R_H = A$, entonces H-$\{\varnothing\}$ es una partición de A.

EJERCICIOS: 19 a 21

6. Relaciones de orden

Las relaciones de orden, como su nombre indica, "ordenan" los individuos del campo según determinado criterio *comparativo*, como la edad o la altura de las personas, el peso o la longitud de los objetos, etc. Hay muchos tipos de relaciones de orden, más o menos fuertes según los casos, pero en todas se han de cumplir ciertos hechos mínimos que son los que garantizan que se pueda hablar propiamente de *orden*, por muy débil que éste sea. Estos hechos mínimos asociados a toda idea de orden son básicamente dos: (a) que no haya "círculos" o "bucles", y (b) que se "herede" o "transmita". La segunda condición se plasma siempre del mismo modo, a saber, la relación ha de ser transitiva. La primera condición parece exigir que la relación sea al menos antisimétrica y en general así es, pero como veremos hay un tipo de orden que puede no ser antisimétrico y que a pesar de ello cabe considerarlo como un orden (aunque *débil*).

En los órdenes antisimétricos tenemos dos tipos de condiciones adicionales. En primer lugar, según sea la relación reflexiva o irreflexiva; esto es, se

permite que haya individuos relacionados consigo mismos, pero se exige que ello ocurra siempre o no ocurra nunca. Los órdenes irreflexivos se denominan *estrictos*, y los órdenes reflexivos, *no estrictos*. En segundo lugar, según la relación sea o no conexa. A los órdenes conexos se les denomina *lineales* o *fuertes*, y a los que pueden no ser conexos, *parciales*. La combinación de estas posibilidades genera los siguientes cuatro tipos de orden (recuérdese que si una relación es irreflexiva y antisimétrica entonces es asimétrica).

ORDEN PARCIAL NO ESTRICTO

DEF R es una relación de orden parcial no estricto syss$_{def}$ R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

EJEMPLOS:
{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,5>,<1,5>,<3,5>,<3,3>,<4,5>,<4,4>,<5,5>}
{<1,1>,<1,2>,<2,5>, <1,5>, <2,2>, <5,5>}
$\{\langle x,y\rangle \in R\times R \,/\, x\geq y\}$

ORDEN LINEAL NO ESTRICTO

DEF R es una relación de orden lineal no estricto syss$_{def}$ R es reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa.

EJEMPLOS:
{<1,1>,<1,2>,<2,5>, <1,5>, <2,2>, <5,5>}
$\{\langle x,y\rangle \in R\times R \,/\, x\geq y\}$

ORDEN PARCIAL ESTRICTO

DEF R es una relación de orden parcial estricto syss$_{def}$ R es irreflexiva, antisimétrica y transitiva.

EJEMPLOS:
{<1,2>,<2,5>,<1,5>,<3,5>,<4,5>}
{<1,2>,<2,5>,<1,5>}
$\{\langle x,y\rangle \,/\, x$ es más liviano que $y\}$
$\{\langle x,y\rangle \in R\times R \,/\, x>y\}$

ORDEN LINEAL ESTRICTO

DEF R es una relación de orden lineal estricto syss$_{def}$ R es irreflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa.

EJEMPLOS:
{<1,2>,<2,5>,<1,5>}
$\{\langle x,y\rangle \in R\times R \,/\, x>y\}$

Como indicamos, los órdenes lineales son aquellos órdenes parciales que además son conexos, y los órdenes estrictos son como los no estrictos, pero irreflexivos en lugar de reflexivos. En la lista anterior falta un tipo de orden que es muy débil pero que cabe todavía considerarlo orden y que, como hemos anunciado, no es antisimétrico. Un ejemplo de una relación de orden tal es la "versión no estricta y conexa" de "ser más liviano que", a saber, "ser tan o más liviano que". Intuitivamente, si "ser más liviano que" se puede considerar una relación de orden, entonces parece que "ser tan o más liviano que" también debe poder ser considerada un cierto tipo de relación de orden, y sin embargo en este caso la relación no es antisimétrica: hay pares de individuos *diferentes* tales que el primero es tan o más liviano que el segundo y éste es tan o más liviano que aquél, a saber, cuando objetos diferentes son igual de livianos. A estos órdenes se les denomina *débiles*:

ORDEN DÉBIL

DEF *R* es una relación de orden débil syss$_{\text{def}}$ *R* es reflexiva, transitiva y conexa.

EJEMPLOS:
{<1,2>,<1,1>,<2,1>,<2,2>,<2,4>,<1,4>, <1,3>, <2,3>,<3,3>, <3,4>, <4,4>}
{<*x*,*y*> / *x* es tan o más liviano que *y*}.

Es inmediato ver que toda relación de orden lineal es también de orden parcial y, si es no estricto, es también de orden débil.

(70) Para todo *R*: si *R* es un orden lineal estricto entonces es un orden parcial estricto.
(71) Para todo *R*: si *R* es un orden lineal no estricto entonces es un orden parcial no estricto.
(72) Para todo *R*: si *R* es un orden lineal no estricto entonces es un orden débil.

Las anteriores definiciones de relaciones de orden se extienden de manera natural a *ordenamientos de conjuntos*, esto es, a relaciones de orden cuyo campo es cierto conjunto. Así, el siguiente esquema sirve para definir los correspondientes ordenamientos:

ESQ *R* ordena ... *A* (o: <*A*, *R*> es un orden ...) syss$_{\text{def}}$ *R* es un orden ... y Cam *R* = *A*

BUEN ORDEN

Hay todavía una relación de orden más que no hemos visto y que es muy importante. Puesto que presentarla rigurosamente requeriría introducir nuevo aparato formal algo complejo, vamos a comentarla sólo informalmente. De los órdenes que hemos visto, los lineales (estrictos o no es-

trictos) son los "mejores" en el sentido de que en un orden lineal, dados dos individuos cualesquiera del campo, siempre puedo decir "quién va antes que quién", los individuos están "alineados" por la relación. Eso no pasa en los órdenes parciales (cuando no son lineales) pues hay individuos "desconectados", no relacionados y de los que por tanto no puedo decir "quién va antes que quién". Cuando un orden es lineal, puede ocurrir que en el conjunto que ordena haya un "primero", esto es, un objeto que es anterior a todos los demás. Por ejemplo, la relación "ser menor que", <, ordena linealmente los números enteros Z pero no existe un entero que sea el "primero" en esa relación. La relación < ordena linealmente también los naturales N, y ahora sí que existe un <-primero, el 0. Pues bien, nótese que no ocurre que N tiene un <-primero, sino que cualquier subconjunto (no vacío) *A* de N tiene un <-primero. Pero eso no pasa con cualquier orden lineal. Hemos visto que < ordena linealmente Z pero no hay nadie en Z que sea <-primero. Y se ve también fácilmente que "ser mayor que", >, ordena linealmente N pero no hay nadie en N que sea >-primero. Quizás se piense que siempre que una relación *R* ordena linealmente un conjunto *A* y *A* tiene *R*-primero, entonces todo subconjunto (no vacío) de *A* tiene también *R*-primero. Eso es lo que pasaba efectivamente con N y <. Pero no sucede siempre así. Por ejemplo, < ordena linealmente los reales positivos R^+, y en R^+ hay un <-primero, el 0, pero no todo subconjunto de R^+ tiene un <-primero; por ejemplo, el subconjunto $R^+-\{0\}$ no tiene <-primero. Así pues, esos órdenes $<A,R>$ tales que todo subconjunto (no vacío) de *A* tiene *R*-primero, p.e. $< N,< >$, son todavía mejores órdenes que los lineales. De un orden tal se dice que es un *buen orden*. Así, < bienordena N, pero no Z, ni R, aunque sí los ordena linealmente; y > ordena linealmente N pero no lo bienordena.

EJERCICIOS: 22

Ejercicios

Sean:

$R_1 = \{<1,a>,<1,b>,<b,a>,<b,1>\}$
$R_2 = \{<2,2>,<2,4>,<1,3>,<3,1>,<3,3>,<4,4>,<4,2>\}$
$R_3 = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<3,5>,<1,4>\}$
$R_4 = \{<1,a>,<2,a>,<3,b>,<4,b>\}$
$R_5 = \{<a,4>,<a,6>,<b,4>,<c,5>,<d,5>\}$
$R_6 = \{<4,6>\}$
$R_7 = \varnothing$
$R_8 = \{<a,c>,<3,5>\}$
$R_9 = \{<a,b>,<b,c>,<a,c>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$
$R_{10} = \{<1,1>,<a,a>,<b,1>,<1,b>,<b,b>\}$
$R_{11} = \{<a,a>,<2,2>\}$
$R_{12} = \{<a,1>,<b,2>,<2,a>,<1,b>\}$
$R_{13} = \{<x,y> \in H \times H$ / x es cónyuge de y$\}$
$R_{14} = \{<x,y> \in H \times H$ / x es hermano de y$\}$

$R_{15}=\{<x,y>\in H\times H$ / y es suegro de x}
$R_{16}=\{<x,y>\in F\times H$ / x es madrina de y}
$R_{17}=\{<x,y>\in H\times H$ / x es amante de y}
$R_{18}=\{<x,y>\in M\times M$ / x es más bajo que y}
$R_{19}=\{<x,y>\in H\times H$ / x es tan o más bajo que y}
$R_{20}=\{<x,y>\in H\times N$ / x tiene y brazos}
$R_{21}=\{<x,y>\in N\times H$ / y tiene x pelos en la cabeza}
$R_{22}=\{<x,y>\in H\times H$ / x está empadronado en el mismo municipio que y}
$R_{23}=\{<x,y>\in H\times L$ / x ha leído y}
$R_{24}=\{<x,y>\in L\times H$ / y ha escrito x}
$R_{25}=\{<x,y>\in H\times H$ / x tiene la misma edad que y}
$R_{26}=\{<x,y>\in Z\times Z \ / \ y=-x\}$
$R_{27}=\{<x,y>\in Z\times Z \ / \ |y|=|x|\}$
$R_{28}=\{<x,y>\in Z\times Z \ / \ y=x+3\}$
$R_{29}=\{<x,y>\in Z\times Z \ / \ x=0\}$
$R_{30}=\{<x,y>\in N\times N \ / \ y=2\}$
$R_{31}=\{<x,y>\in N\times N \ / \ resto(x/3)=resto(y/3)\}$
$R_{32}=\{<x,y>\in N\times N$ / x-y es múltiplo de 4}
$R_{33}=\{<x,y>\in N\times N$ / x+y es múltiplo de 5}
$R_{34}=\{<x,y>\in R\times R \ / \ y=x^2\}$
$R_{35}=\{<x,y>\in R\times R \ / \ y=3x-5\}$

Y sean A_1-A_{20} los mismos conjuntos que en los ejercicios del capítulo anterior, hallar:

11 Dominio, recorrido y campo de R_i (para i entre 1 y 35).
12 R_i^{-1} (para i entre 1 y 35).
13 R_i/R_{i+1} (para i entre 1 y 34).
14 $R_3/R_2/R_4$, $R_{10}/R_9/R_{12}$, R_3/R_3, R_9/R_9 y R_{17}/R_{13}.
15 $R_i|A_i$ (para i entre 1 y 9).
16 $R_{13}|A_{14}$, $R_{14}|A_{11}$, $R_{15}|A_{12}$, $R_{16}|A_{11}$ y $R_{17}|A_{13}$.
17 R[A] para los casos de los dos ejercicios anteriores.
18 Las propiedades de R_i (para i entre 1 y 35).
19 Determinar qué R_i (para i entre 1 y 35) son de equivalencia. Para las que lo sean, construir el conjunto cociente de su campo bajo ellas.
20 Construir una partición para cada A_i (con i entre 1 y 20).
21 Para A_2, A_3, A_7, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_{18}, A_{19} y A_{20}, construir tres particiones de cada uno tales que una sea más fina que otra y la tercera ni más ni menos fina que las dos primeras.
22 Determinar qué R_i (para i entre 1 y 35) son de orden y, para las que lo sean, su tipo de orden.

CAPÍTULO 13

FUNCIONES

1. Funciones

NOCIÓN DE FUNCIÓN

En las relaciones, un mismo objeto puede "tener a su derecha" varios objetos diferentes; por eso no podemos por lo general, para cada individuo, hablar de "el que está a su derecha". En la relación "ser más bajo que" no tiene sentido hablar p.e. de "el individuo tal que Napoleón es más bajo que él", pues hay varios. Para ello, sería necesario que la relación fuese de un tipo especial, a saber, tal que cada individuo del dominio sólo estuviera relacionado con un único individuo del recorrido. En términos coloquiales: que la relación sea tal que no haya dos pares ordenados con idéntico primer miembro y segundo miembro diferente. A las relaciones que tienen esta propiedad se las denomina *funciones*

DEF A es una función syss_{def} A es una relación y para todo x, y, z: si $<x,z>\in A$ y $<y,z>\in A$, entonces $x=y$.

EJEMPLO:
Son funciones:
$A = \{<1,2>,<2,3>,<3,3>,<4,1>\}$
$B = \{<x,y>\in \text{H}\times\text{H} \,/\, x$ tiene por madre a $y\}$
$C = \{<x,y>\in \text{R}\times\text{R} \,/\, x^2 = y\}$
No son funciones:
$D = \{<1,2>,<2,3>,<3,3>,<,4,2>,<4,1>\}$
$E = \{<x,y>\in \text{H}\times\text{H} \,/\, x$ es hermano de $y\}$
$F = \{<x,y>\in \text{R}\times\text{R} \,/\, x = y^2\}$,
pero sí que lo es
$G = \{<x,y>\in \text{R}\times\text{R}^+ \,/\, x = y^2\}$,

A partir de ahora usaremos las letras '*f*', '*g*', '*h*' ... como variables para connotar funciones.

IMAGEN

En tanto que relaciones, a las funciones se les aplica las mismas nociones de dominio, recorrido, etc. que a aquéllas. Por el tipo especial de relaciones que son, se puede definir para las funciones la noción de "el que está relacionado con" a que hemos hecho referencia. Ésta es la noción de *imagen de un objeto bajo una función*, o de *valor de una función para un objeto*. La imagen del objeto x bajo la función f (en cuyo dominio está x), el valor de f para x, que denotaremos mediante '$f(x)$', es *el único* objeto y que está a la derecha de x en f:

DEF Sea f una función y $x \in \mathrm{Dom}\, f$:
$f(x) =_{\mathrm{def}}$ el único y tal que $\langle x,y\rangle \in f$.

Así, en los ejemplos anteriores:

$A(2)=3$
B(Edipo)=Yocasta
$C(-3)=9$.

BIYECCIONES

Una función se caracteriza porque cada objeto del dominio sólo está relacionado con uno del recorrido, pero lo inverso puede no ser cierto, como en el caso de la anterior la función A, en la que el 3 es imagen tanto de 2 como de 3. Por tanto, no siempre la relación conversa de una función es a su vez una función. Diremos que una función es *biyectiva* o *biunívoca* cuando ello sí sucede, cuando no sólo cada objeto del dominio está relacionado con un único objeto del recorrido, sino que a la vez cada objeto del recorrido está relacionado con un único objeto del dominio.

DEF f es una función biyectiva syss$_{\mathrm{def}}$ f es función y f^{-1} es función.

EJEMPLO:
Son biyectivas las funciones
$f = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$
$g = \{\langle x,y\rangle \in \mathrm{H}\times\mathrm{H}$ / x es cónyuge de $y\}$ (en sociedades monógamas)
$h = \{\langle x,y\rangle \in \mathrm{R}\times\mathrm{R} / x+8= y\}$
Y no lo son
$i = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$
$j = \{\langle x,y\rangle \in \mathrm{H}\times\mathrm{H}$ / x tiene por madre a $y\}$
$k = \{\langle x,y\rangle \in \mathrm{R}\times\mathrm{R} / y=x^2\}$

Es fácil comprobar que una función biyectiva es tal que el producto relativo con su relación conversa es la identidad sobre su dominio; podríamos por tanto utilizar este hecho como definición alternativa de función:

(73) Para toda f: f es biyectiva syss $f/f^{-1}= \mathrm{I}_{\mathrm{Dom}\, f}$

EJERCICIOS: 23 y 24

2. Operaciones con funciones

En tanto que conjuntos, a las funciones se aplican las operaciones generales entre conjuntos. En tanto que relaciones, a ellas se aplican las operaciones generales entre relaciones. Por ser un tipo especial de relaciones, se pueden definir además operaciones específicas para ellas. Las más comunes son la *inversión* y la *composición* (aunque el lector podrá comprobar que no son más que casos especiales de operaciones entre relaciones de las que ya disponemos). Incluimos en esta sección la *exponenciación de conjuntos*, aunque no es una operación *entre* funciones sino una operación entre conjuntos cualesquiera que genera (conjuntos de) funciones.

FUNCIÓN INVERSA

La *función inversa* de una función f no es más que su relación conversa cuando ésta es función.

DEF Sea f una función: f^{-1} es la función inversa de f syss f^{-1} es función.

Dada la definición de biyectividad, es inmediato entonces que una función tiene función inversa cuando es biyectiva:

(74) Para toda f: f tiene función inversa syss f es biyectiva

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La *función compuesta* de dos funciones f y g, que denotaremos mediante '$g{\circ}f$', es una nueva función tal que la imagen de un individuo x se obtiene aplicándole primero f y aplicando después g al resultado así obtenido; esto es, $g{\circ}f$' (x) es la imagen bajo g de la imagen de x bajo f:

DEF $g{\circ}f$' $=_{def} \{\langle x,y\rangle \,/\, y=g(f(x))\}$

EJEMPLO:
$f=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$ y $g=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 4,a\rangle, \langle 6,b\rangle\}$
$g{\circ}f\,(1) = g(f(1)) = g(2) = c$
$g{\circ}f = \{\langle 1,c\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 3,a\rangle\}$

EJEMPLO: $h = \{\langle x,y\rangle \in R{\times}R \,/\, y=x+8\}$ y $j = \{\langle x,y\rangle \in R{\times}R \,/\, y=3x^2\}$
$j{\circ}h\,(-6) = j(h(-6)) = j(2) = 12$
$j{\circ}h = \{\langle x,y\rangle \,/\, y=3(x+8)^2\}$.

El lector puede comprobar que la composición entre funciones no es más que el producto relativo en el orden opuesto y que es asociativa pero no conmutativa:

(75) Para todo f, g: $g{\circ}f = f/g$
(76) NO para todo f, g: $f{\circ}g = g{\circ}f$
(77) Para todo f, g, h: $h{\circ}(g{\circ}f) = (h{\circ}g){\circ}f$

EXPONENCIACIÓN DE CONJUNTOS

Antes de comentar la noción de cantidad de elementos de los conjuntos, vamos a introducir muy brevemente una última operación entre conjuntos, la *exponenciación* de conjuntos. La idea es muy sencilla, la exponenciación de dos conjuntos A y B (por ese orden), que denotaremos mediante 'A^B', no es más que el conjunto de todas las funciones de con dominio igual a B y recorrido incluido en A:

DEF $A^B = \{f \,/\, f$ es función, Dom$f$=B y Rec$f$ $B \subseteq A\}$

EJEMPLO: A={1,2} y B={a,b,c}
A^B = { {<a,1>,<b,1>,<c,1>} , {<a,1>,<b,1>,<c,2>} , {<a,1>,<b,2>,<c,1>} ,
{<a,2>,<b,1>,<c,1>} , {<a,1>,<b,2>,<c,2>} , {<a,2>,<b,1>,<c,2>} ,
{<a,2>,<b,2>,<c,1>} , {<a,2>,<b,2>,<c,2>} }
B^A = { {<1,a>,<2,a>} , {<1,a>,<2,b>} , {<1,a>,<2,c>} ,
{<1,b>,<2,a>} , {<1,b>,<2,b>} , {<1,b>,<2,c>} ,
{<1,c>,<2,a>} , {<1,c>,<2,b>} , {<1,c>,<2,c>}}

EJERCICIOS: 25

3. **Tipos de funciones**

Para ciertos fines es conveniente caracterizar las diversas posibilidades de que una función "conecte" dos conjuntos, un conjunto "de partida" A, y un conjunto "de llegada" B. Como conjunto de partida siempre se toma el dominio de la función, y como conjunto de llegada se toma uno que al menos contiene al recorrido de la función. Tenemos entonces las siguientes posibilidades dependiendo de si la función "agota" o no todo el conjunto de llegada y de si es o no biyectiva:

FUNCIÓN DE A EN B

Este es el concepto más general que después los demás irán restringiendo.

DEF f es una función de A en B syss$_{\text{def}}$ f es función y Dom $f = A$ y Rec $f \subseteq B$

INYECCIÓN DE A EN B

Una función es una inyección entre dos conjuntos cuando es biyectiva:

DEF f es una inyección de A en B syss$_{\text{def}}$ f es una función de A en B y f es biyectiva

EXHAUCIÓN DE A EN B

Una función es una exhaución entre dos conjuntos cuando su recorrido agota el conjunto de llegada:

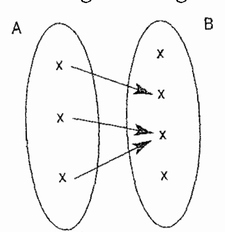
DEF f es una exhaución de A en B syss$_{\text{def}}$ f es una función de A en B y Rec $f = B$

PROYECCIÓN DE A SOBRE B

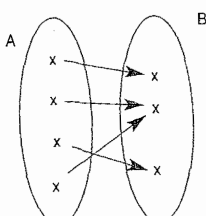
Una función es una proyección entre dos conjuntos cuando es biyectiva y agota el conjunto de llegada, esto es, cuando es a la vez una exhaución y una inyección entre ellos:

DEF f es una proyección de A sobre B syss$_{\text{def}}$ f es una función de A en B y f es biyectiva y Rec $f = B$

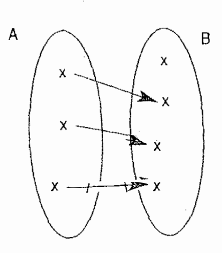
Podemos representar ejemplos de estas diversas posibilidades mediante los siguientes grafos:



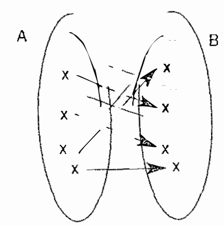
Función que no es inyectiva ni exhaustiva



Función exhaustiva no inyectiva



Función inyectiva no exhaustiva



Proyección

4. Equipotencia, finitud e infinitud

Con el concepto de *proyección* entre dos conjuntos podemos analizar la noción de *cantidad* de elementos o *tamaño* de un conjunto; o mejor, la noción *tener la misma cantidad de elementos que*. En realidad no se trata de "la" noción de cantidad, pues una breve reflexión sobre nuestro uso pre-

teórico, intuitivo, de ella muestra que no se puede tratar de una única noción. Clarificar este uso nos permitirá introducir, y clarificar también, la noción de *(in)finitud*.

EQUIPOTENCIA

Nuestro uso cotidiano de la noción de "cantidad", o mejor, de la noción comparativa "tener la misma (mayor / menor) cantidad de cosas que", parece tener las siguientes consecuencias:

(a) Si a un conjunto de cosas le quito algunas de esas cosas el conjunto resultante tiene menos cantidad de cosas que el original.
Por ejemplo, si del conjunto de libros de mi estantería saco algunos, el conjunto resultante tiene menor cantidad de libros.

(b) Si dos conjuntos son tales que, a cada objeto de uno de ellos asocio un y sólo un objeto del otro, y esa asociación cubre todos los elementos de ambos conjuntos, entonces ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.
Por ejemplo, si por cada libro de mi estantería hay una ficha en mi archivador, y viceversa, entonces hay la misma cantidad de libros que de fichas.

Pues bien, aunque estas intuiciones parezcan muy firmes, no hay ningún concepto *general* de cantidad (e.e. aplicable a *cualquier* conjunto) que encaje con ambas ideas. Es decir, estas dos intuiciones sobre la relación "tener la misma (mayor/menor) cantidad de cosas que", si la relación se quiere aplicar a pares de conjuntos cualesquiera, son contradictorias. En efecto, contemplemos por ejemplo el conjunto de los números naturales:

1 2 3 4 5 6 7 ....

Quitemos ahora de este conjunto unos cuantos elementos, por ejemplo el 1, el 2, el 3 y el 4. Nos queda el conjunto

5 6 7 8 9 10 11 ....

Ahora, según la primera intuición, el segundo conjunto tiene menos cantidad de elementos que el primero. Pero según la segunda intuición ambos tienen la misma cantidad de elementos, pues, como se indica a continuación, es inmediato que puedo asociar a cada uno de los de arriba uno de los de abajo y viceversa:

$1 \to 5$
$2 \to 6$
$3 \to 7$
$4 \to 8$
....
$n \to n+4$

Así pues, estas dos intuiciones sobre la cantidad son, *aplicadas a conjuntos cualesquiera*, contradictorias. No puede entonces haber ningún concepto *coherente* de cantidad que encaje con ambas. Lo que sucede es que, aunque nos confundamos porque a veces coinciden, se trata en realidad de dos conceptos de cantidad diferentes. Según un primer concepto de cantidad, si un conjunto está incluido estrictamente en otro, es subconjunto propio suyo, entonces tiene menos cantidad de elementos. Según un segundo concepto de cantidad, si dos conjuntos se pueden correlacionar biunívocamente, entonces tienen la misma cantidad de elementos. Para este segundo concepto de cantidad acuñamos la noción conjuntista de *equipotencia*, que denotaremos mediante el sigo '~'. La equipotencia es la relación que se da entre dos conjuntos cuando son correlacionables biunívocamente. Podemos, entonces, usar la noción de proyección que hemos introducido antes para definir la equipotencia:

DEF $A \sim B$ syss$_{\text{def}}$ existe una función f que proyecta A sobre B.

EJEMPLO:
$A = \{a,e,i,o,u\}$ y $B = \{1,2,3,4,5\}$
$A \sim B$, pues p.e. $f = \{\langle a,1\rangle,\langle e,2\rangle,\langle i,3\rangle,\langle o,4\rangle,\langle u,5\rangle\}$ proyecta A sobre B

$VC = \{x$ / x es varón casado (en un país donde rige la monogamia)$\}$ y $MC = \{x$ / x es mujer casada (en un país donde rige la monogamia)$\}$
$VC \sim MC$, pues p.e. $f = \{\langle x,y\rangle \in VC \times MC$ / x está casado con $y\}$ proyecta VC sobre MC

N = $\{x$ / x es un número natural$\}$ y P = $\{x$ / x es un número par positivo$\}$
N~P, pues p.e. $f = \{\langle x,y\rangle \in \text{N} \times \text{P}$ / $y=2x\}$ proyecta N sobre P.

El último ejemplo muestra que los naturales son equipotentes con los pares (positivos), que "hay tantos" naturales como pares (positivos), aunque por cada par haya dos naturales y por tanto, en el otro sentido de cantidad, haya "menos" pares que naturales. Pues bien, se puede probar, aunque no lo haremos aquí, que el conjunto de los naturales también es equipotente con el de los enteros Z. Y no sólo con el de los enteros, que es un conjunto discreto (esto es, hay pares de enteros que no tienen ningún entero entre ellos según el orden $<$), como el de los naturales, sino que también es biyectable con el de los racionales Q, que es un conjunto denso (entre dos racionales siempre hay otro racional, según el orden $<$). Pero, sin embargo, el conjunto de los naturales no es equipotente con el de los reales R: se puede probar que no existe ninguna función que asocie a cada natural un real y viceversa.

(78) N~Z y N~Q y no N~R

El lector habrá advertido ya seguramente que la relación de equipotencia es una relación de equivalencia, esto es, reflexiva, simétrica y transitiva:

(79) Para todo A: $A \sim A$
(80) Para todo A,B: si $A \sim B$ entonces $B \sim A$
(81) Para todo A,B,C: si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$

Como ~ es una relación de equivalencia entre conjuntos, generará clases de equivalencia. La clase de equivalencia de un conjunto está formada por todos los conjuntos equipotentes con él. Así,

$[\varnothing]_\sim = \{\varnothing\}$
[{∅}]$_\sim$ = {{∅}, {Picasso}, {Venus}, {{∅}}, {<Cervantes, El Quijote>},...}=
[{Picasso}]$_\sim$= ...
[{∅, {∅}}]$_\sim$ ={{∅,{∅}}, {Picasso, Dalí},{Venus, Marte}, ...}= [{Picasso, Dalí}]$_\sim$= ...
[{∅, {∅}, {∅, {∅}}}]$_\sim$ = { {∅, {∅}, {∅, {∅}}}, {Picasso, Dalí, Miró}, ... }=
...
etc.

Pues bien, resulta que estas clases de equivalencia tienen propiedades muy interesantes. La más interesante es la siguiente. Diremos que un conjunto A es "tan o menos potente que" otro B cuando A sea equipotente a algún subconjunto (no necesariamente propio) de B. La propiedad interesante a que nos referimos es que *las clases de equivalencia bajo ~ se comportan con la relación "tan o menos potente que" igual que los números naturales se comportan con* $\leq$. ¿Por qué es eso tan interesante? Pues porque ello sugiere que *podemos identificar los números naturales con las clases de equivalencia de conjuntos bajo ~*. Esto es aproximadamente lo que hizo Frege en su *programa logicista*, el proyecto de reducir la aritmética a la lógica (que, para él, incluía la teoría de conjuntos); y esa sigue siendo la esencia de lo que se quiere decir cuando se mantiene hoy que la aritmética es reducible a teoría de conjuntos. Actualmente, en lugar de definir los números naturales como las clases de equivalencia de conjuntos bajo ~ (el 0 como la clase de todos los conjuntos sin elementos, e.e. la clase formada por el conjunto vacío; el 1 como la clase de todos los conjuntos con un un elemento, e.e. de los conjuntos equipotentes con {∅}; el 2 como la clase de conjuntos con dos elementos, e.e. de los conjuntos equipotentes con {∅,{∅}}; etc.), se les define mediante un "representante" de tales clases, por ejemplo:

$0 =_{def} \varnothing$
$1 =_{def} \{\varnothing\}$
$2 =_{def} \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
$3 =_{def} \{\varnothing,\{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
etc.,

Con estas definiciones, si definimos además $\leq$ como "ser tan o menos potente que", entonces, de los axiomas de la teoría de conjuntos se siguen como teoremas los axiomas de Peano. Es decir, en la teoría de conjuntos son ciertas de esas entidades conjuntistas los principios que caracterizan los números naturales.

Una vez tenemos así definidos conjuntistamente los números naturales, es fácil definir entonces la suma, el producto y la exponenciación mediante, respectivamente, la unión, el producto cartesiano y la exponenciación de conjuntos. La clave para esas definiciones, que no pode-

mos ver aquí, es que esas operaciones conjuntistas preservan la equipotencia (en el caso de la unión, con alguna pequeña restricción que es muy sencillo acomodar para la definición). Esto es, los hechos claves para esas definiciones son los siguientes:

(82) Para todo A, B, C, D: si $A \sim B$ y $C \sim D$ y $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$, entonces $A \cup C \sim B \cup D$
(83) Para todo A, B, C, D: si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A \times C \sim B \times D$
(84) Para todo A, B, C, D: si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A^C \sim B^D$

Este es el núcleo de la reducción de la matemática a teoría de conjuntos. Al menos de la reducción de la parte de la matemática para la que basta la teoría de los números reales (que es gran parte de la matemática clásica), pues disponiendo de los naturales se pueden construir los enteros, los racionales y los reales.

FINITUD E INFINITUD

Hemos visto que las dos intuiciones básicas de nuestra idea intuitiva de cantidad son, *aplicadas a conjuntos cualesquiera*, contradictorias; no hay un único concepto coherente que encaje con ambas. ¿Por qué parecen entonces tan plausibles? Pues porque nuestras intuiciones se apoyan en los casos en que los conjuntos involucrados son finitos, y las dos nociones de cantidad que inspiran ambas intuiciones, aunque son incompatibles en general, son compatibles restringidas al ámbito de los conjuntos finitos. Para conjuntos finitos, *y sólo para ellos*, sí ocurre que ambas nociones arrojan los mismos resultados: si de un conjunto finito extraemos algunos elementos, entonces el conjunto resultante no es equipotente con el original.

Ahora estamos usando 'finito' e 'infinito' intuitivamente, pues no tenemos una definición precisa de estas nociones. Pues bien, podemos utilizar justamente el hecho mencionado para definir cuándo un conjunto es infinito: un conjunto será infinito precisamente cuando sea posible quitarle elementos y que el resultado sea equipotente al original, esto es, cuando es equipotente a algún subconjunto propio.

DEF A es infinito syss_{def} existe B tal que $B \subset A$ y $B \sim A$

DEF A es finito syss_{def} A no es infinito

El lector debe comprobar que las siguientes propiedades coinciden con sus intuiciones:

(85) Para todo A,B: si A es infinito y $A \subseteq B$ entonces B es infinito
(86) Para todo A,B: si B es finito y $A \subseteq B$ entonces A es finito
(87) Para todo A,B: si A es infinito y $A \sim B$ entonces B es infinito
(88) Para todo A,B: si A es finito y $A \sim B$ entonces B es finito
(89) Para todo A: A es finito syss Pot A es finito
(90) Para todo A,B: A es finito y B es finito syss $A \cup B$ es finito

(91) Para todo $A,B \neq \varnothing$: A es finito y B es finito syss $A \times B$ es finito
(92) Para todo $A,B \neq \varnothing$: A es finito y B es finito syss A^B es finito
(93) Para todo A,B: si A es finito entonces $A \cap B$ y A-B son finitos
(94) Para todo A,B: si A es infinito entonces $A \cup B$ es infinito
(95) Para todo A,B: si A es infinito y $B \neq \varnothing$ entonces $A \times B$ y A^B son infinitos

5. Sistemas y morfismos

SISTEMAS

Un *sistema* o una *estructura* $\mathbb{S}$ es una secuencia o tupla ordenada consistente en un conjunto de individuos, llamado el *universo* del sistema, y una serie de relaciones y/o funciones entre objetos de dicho universo:

$\mathbb{S} = <S, R_1, ..., R_n, f_1, ..., f_m>$.

Una estructura expresa un modo en que puede comportarse una parte de la realidad; es un mundo o situación posible en el que ciertos individuos, los miembros del universo, se comportan de cierto modo, guardan ciertas relaciones y están vinculados por ciertas funciones. Así, por ejemplo, tenemos las siguientes estructuras, constituidas todas ellas, además del universo, por una relación binaria y una función monaria (N es el conjunto de los números naturales, P el de los naturales pares y Z el de los enteros):

$\mathbf{A} = <\{1,2\}, \{<1,1>,<1,2>,<2,2>\}, \{<1,2>,<2,1>\}\}$
$\mathbf{B} = <\{a,b\}, \{<a,a>,<a,b>,<b,b>\}, \{<a,b>,<b,a>\}\}$
$\mathbb{C} = <\{+,*\}, \{<+,*>,<+,+>\}, \{<+,+>,<*,*>\}\}$
$\mathbb{N} = <N, \{<x,y>/ x \leq_N y\}, \{<x,y> / y=x+1\}>$
$\mathbf{P} = <P, \{<x,y> / x \leq_P y\}, \{<x,y> / y=x+2\}>$
$\mathbb{Z} = <Z, \{<x,y> / x \leq_Z y\}, \{<x,y> / y=x+1\}>$

MORFISMOS

A veces dos sistemas pueden parecerse mucho, tanto que son como dos versiones diferentes de los mismos hechos; p.e. **A** y **B** se parecen tanto que en ambos "pasa lo mismo", sólo que en lugar de pasarle "eso" "al 1 y al 2" le pasa "al a y al b". Decimos entonces que los sistemas son *isomorfos*, o que existe un isomorfismo entre ambos. Un isomorfismo es una función biunívoca que "traduce" un sistema al otro. En nuestro caso, una función que traduce **A** a **B** es, por ejemplo,

$h_1 = \{<1,a>,<2,b>\}$

En efecto, si en **A** cambiamos 1 por a y 2 por b, obtenemos **B**. Por lo que hemos dicho en la sección anterior, debe ser claro que **N** y **P** también guardan esta relación (antes de ver la noción técnica, procure el lector hallar un isomorfismo que realice la traducción en ese caso).

Homología

Para que pueda existir un isomorfismo entre dos sistemas es necesario que los sistemas sean del mismo tipo lógico, que sean *homólogos*: que tengan el mismo número de relaciones y funciones; y que la ariedad de las relaciones/funciones de un sistema se corresponda con las del otro.

DEF Dos sistemas $\mathbf{A} = <A, R_1, ..., R_n, f_1, ..., f_m>$ y $\mathbf{B} = <B, S_1, ..., S_{n'}, g_1, ..., g_{m'}>$ son homólogos syss$_{def}$
(1) $n=n'$ y $m=m'$,
(2) R_i tiene la misma ariedad que S_i ($1 \leq i \leq n$), y
(3) f_j tiene la misma ariedad que g_j ($1 \leq j \leq m$).

EJEMPLO: los seis sistemas anteriores son homólogos.

Isomorfía

Ahora podemos presentar ya la definición precisa de isomorfismo:

DEF Sean $\mathbf{A} = <A, R_1, ..., R_n, f_1, ..., f_m>$ y $\mathbf{B} = <B, S_1, ..., S_n, g_1, ..., g_m>$ dos sistema homólogos,
h es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ syss$_{def}$:
(1) h proyecta A sobre B
(2) Si k elementos $a_1,...,a_k$ de A están relacionados mediante R_i, sus correspondientes imágenes bajo h en B están relacionadas mediante S_i, (k es la ariedad de R_i y S_i):
Para todo $a_1,...,a_k$ de A: $<a_1,...,a_k> \in R_i$ syss $<h(a_1),...,h(a_k)> \in S_i$
(3) Si f_j asigna a k elementos $a_1,...,a_k$ de A otro elemento a', g_j asigna a las imágenes de $a_1,...,a_k$ bajo h la imagen de a' bajo h (k es la ariedad de f_j y g_j):
Para todo $a_1,...,a_k, a'$ de A: $f_j(a_1,...,a_k) = a'$ syss $g_j (h(a_1), ... ,h(a_k)) = h(a')$.

Dos sistemas son isomorfos si son tales que existe un isomorfismo entre ambos. Nótese que, aunque dos sistemas sean isomorfos, no toda proyección entre sus dominios necesariamente es un isomorfismo; sólo se exige que al menos una lo sea. Es posible que haya más de una que lo sea, pero es posible también que alguna proyección no lo sea. Por ejemplo, la proyección h_2 = {<1,b>,<2,a>} no es un isomorfismo entre **A** y **B** (sí lo sería si la relación de **A** incluyera además el par <2,1> y la relación de **B** el par <b,a>, compruébelo el lector). **A** y **C** no son isomorfos porque *ninguna* proyección de A en **C** es un isomorfismo (compruébelo el lector).

EJEMPLO:
N y **P** son isomorfos. Existe al menos una función que es un isomorfismo entre ambos, por ejemplo:
$h3 = \{<x,y> \in N \times P \ / \ y=2x\}$.
N y **Z** no son isomorfos pues, aunque los naturales y los enteros son biyectables, ninguna de tales biyecciones preserva la relación "menor que" ni la función "sumar uno".

Homomorfía

Entre sistemas homólogos cabe una relación de semejanza más débil que la de isomorfía, la relación de *homomorfía*. De los homomorfismos no se exige que sean biyectivos. Un homomorfismo de **A** en **B** es una función de *A* en *B* que cumple las condiciones (2) y (3) de la definición anterior. **A** y **B** son homomorfos si existe un homomorfismo de **A** en **B**. Por ejemplo, **N** es homomorfo a **Z** bajo la función identidad (compruebe el lector que **A** no es ni siquiera homomorfo a **C**). En los homomorfismos puede haber elementos del universo del sistema de llegada que sean imagen de más de un original o que no lo sean de ninguno; en los isomorfismos no puede pasar ninguna de estas cosas pues son biyecciones entre los universos completos. Los isomorfismos son pues un caso especial de homomorfismos, son homomorfismos biyectivos que agotan los universos. Nótese que siempre que existe un isomorfismo h de **A** en **B** existe otro de **B** en **A**, simplemente la función h^{-1} inversa de h; pero no ocurre lo mismo con los homomorfismos, p.e. **Z** no es homomorfo a **N**.

EJERCICIOS: 26 a 30

Ejercicios

23 Determinar qué relaciones de los ejercicios del capítulo anterior son funciones.
24 Determinar qué funciones del ejercicio anterior son funciones biyectivas.
25 Para las relaciones del ejercicio 23 que sean funciones, componer cada una con la siguiente (que sea función) y con ella misma.

Para cada uno de los siguientes sistemas, dar otros dos tales que uno sea isomorfo al original y el otro sea homomorfo pero no isomorfo.

26 **A** = <{1,2,3}, {<1,1>,<1,2>,<2,2>,<3,2>}, {<1,2>,<2,1>,<3,3>}}
27 **B** = <{a,b}, {<a,a>,<a,b>}, {<a,a>,<b,b>}}
28 **H** = < H, {<*x*,*y*>/*x* es marido de *y*}, {<*x*,*y*>/*y* es el padre de *x*}>
29 **N** = <N, {<*x*,*y*>/ *x*≤*y*}, {<*x*,*y*> / *y*=*x*+1}>
30 **Z** = <Z, {<*x*,*y*> / *x*≤*y*}, {<*x*,*y*> / *y*=*x*+1}>

CAPÍTULO 14

DIAGRAMAS DE VENN Y ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

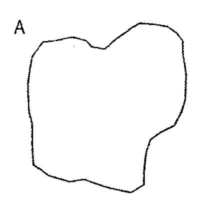
Vamos a ver en este capítulo cómo representar la información de los enunciados conjuntistas mediante diagramas y cómo aplicar esta representación al análisis de algunos argumentos del lenguaje natural, una vez visto previamente cómo formalizar en lenguaje conjuntista los enunciados del lenguaje natural. Comenzaremos por la representación mediante diagramas, seguiremos con la formalización conjuntista de enunciados del lenguaje natural y concluiremos combinando esas dos tareas para analizar argumentos.

1. Representación mediante diagramas

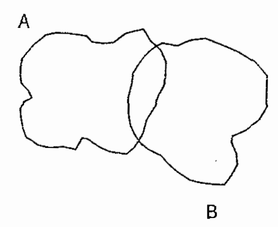
La idea de representar mediante diagramas información conjuntista es muy sencilla. Todos los enunciados conjuntistas que formalizan los argumentos que queremos analizar, son (o se pueden reducir a) alguno de los siguientes tipos: o bien dicen que un conjunto está incluido en otro, o que no lo está; o bien dicen que un conjunto es vacío, o que no lo es:

$A \subseteq B$
$A \not\subseteq B$
$A = \varnothing$
$A \neq \varnothing$

Cada uno de los conjuntos involucrados puede ser tan complejo como queramos, esto es, puede ser el resultado de operar con otros conjuntos más básicos mediante intersección, unión y diferencia. Sea cual sea la formación de cada conjunto, el resultado puede representarse mediante un área cerrada:

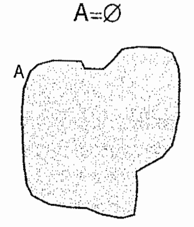


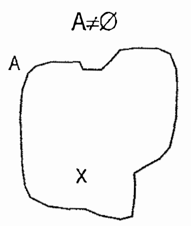
Y si son dos los conjuntos involucrados, mediante dos áreas con una parte en común:



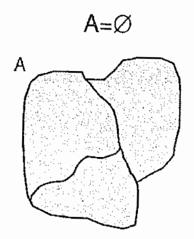
El área total corresponderá a su unión, el área común a su intersección y la parte de un área fuera de la otra corresponderá a la diferencia de la primera menos la segunda.

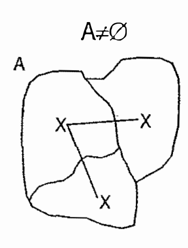
Ahora tenemos que plasmar el contenido de las afirmaciones conjuntistas en estos gráficos. Es posible hacerlo de varios modos. Aquí vamos a usar el siguiente: cuando el enunciado diga que cierto conjunto es vacío sombrearemos el área correspondiente, y cuando diga que no es vacío pondremos una cruz en el área correspondiente:





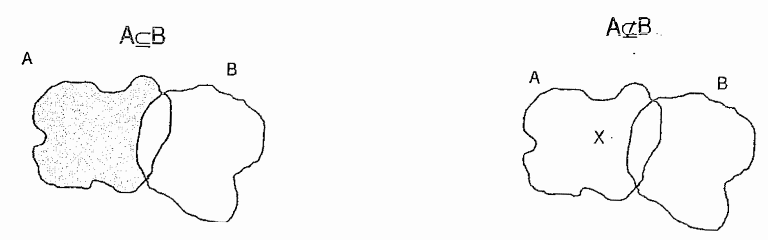
Cuando el área en cuestión conste de otras subáreas, en el primer caso se hace lo mismo, se sombrea el área total, y en el segundo caso se pone una cruz en cada una de las subáreas y se unen las cruces con una línea para indicar que al menos una de ellas "ha de valer", e.e. al menos una de las subáreas ha de contener algo, no es vacía:





Por lo que respecta al otro tipo de enunciados, cuando se afirme que un conjunto está contenido en otro se sombreará la parte del primero que está

fuera del segundo, esto es, no hay nada en uno fuera del otro (recuérdese que $A \subseteq B$ equivale a $A\text{-}B=\varnothing$); y cuando se afirme que no está incluido entonces se pondrá una cruz en la parte del primero fuera del segundo, pues habrá algo en el primero fuera del segundo:



Con estas indicaciones, podemos representar la información de enunciados conjuntistas cuando hay tres conjuntos involucrados. Veamos algunos casos:

A⊆C — A B C

B⊆ A∪C — A B C

C⊆A∩B — A B C

A⊄ C — A B C — X X

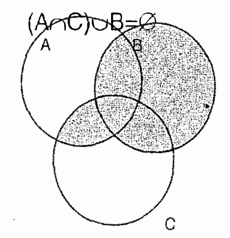
B⊄ A∪C — A B C — X

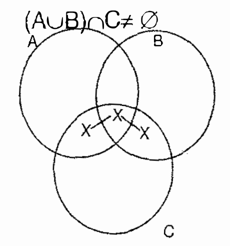
C⊄ A∩B — A B C — X X X

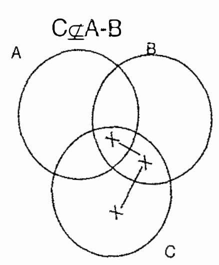
A-(B∪C)≠∅ — A B C — X

(B∪A)-C≠∅ — A B C — X X X

C-(A∩B)=∅ — A B C







EJERCICIOS: 31 a 50

2. Inferencias conjuntistas

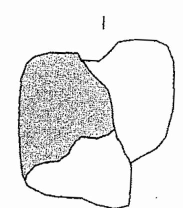
Combinando varios diagramas conjuntistas es posible determinar si una afirmación conjuntista se sigue o no de otras. Cuando en la próxima sección veamos cómo traducir al lenguaje conjuntista enunciados del lenguaje natural, podremos entonces utilizar los diagramas para analizar la validez de algunos argumentos en lenguaje natural. Este método no se va a poder aplicar a cualquier argumento, sino sólo a aquellos cuyas premisas y conclusión usen exclusivamente predicados monarios, y no más de tres de ellos.

La idea general de validez de una inferencia (deductiva) es la que presentamos informalmente en la introducción, y desarrollamos por extenso en las dos partes anteriores: un argumento es (deductivamente) válido cuando la información que proporciona la conclusión *está contenida* en la información que proporcionan las premisas conjuntamente. Puesto que la información de los enunciados conjuntistas se representa en los diagramas mediante dibujos o grafos, lo que necesitamos para aplicar esta idea de validez inferencial a los diagramas es especificar cuándo el grafo de un diagrama "contiene" el de otro:

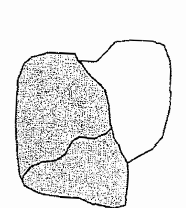
El grafo de un diagrama D1 *contiene* al grafo de otro diagrama D2 syss:
(a) las áreas no vacías (e.e. con cruz) en D2 son áreas no vacías en D1, y
(b) las áreas vacías (e.e. ralladas) en D2 son áreas vacías en D1.

Para aplicar este criterio correctamente se debe tener en cuenta que las cruces solas indican que el área en que se encuentran no es vacía, pero que las cruces unidas indican sólo que alguna de las áreas correspondientes no es vacía. Veamos algunos casos.

I

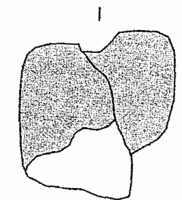


D

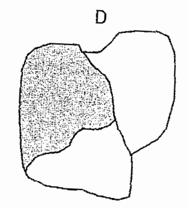


El grafo D no está contenido en el grafo I.

I

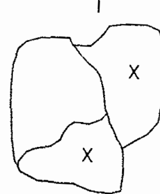


D

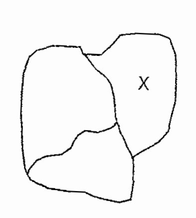


El grafo D está contenido en el grafo I.

I



D

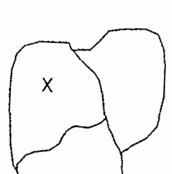


El grafo D está contenido en el grafo I.

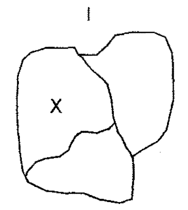
I

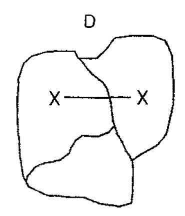
X—X

D



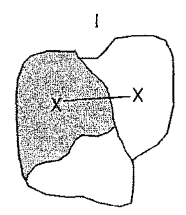
El grafo D no está contenido en el grafo I, pues D asegura que el área izquierda no es vacía, y el grafo I asegura tan sólo que alguna de las áreas superiores no es vacía. I es compatible con que el área izquierda sea vacía (siempre que el área derecha no lo sea).

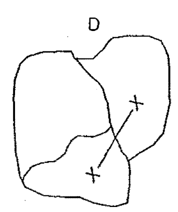




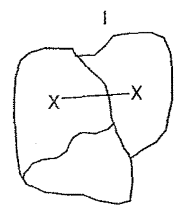
El grafo D está contenido en el grafo I, pues según D alguna de las áreas superiores no es vacía y de acuerdo con I una de ellas en concreto (la izquierda) no es vacía.

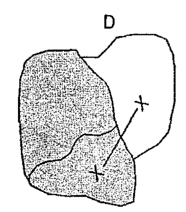
Y exactamente el mismo criterio se aplica en los casos combinados en los que los diagramas incluyen tanto cruces como sombras:





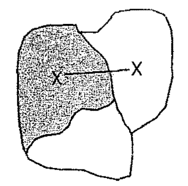
El grafo D está contenido en el grafo I, pues de las dos cruces unidas de I, una está "tachada" por información adicional, y la cruz restante sola asegura entonces que el área donde se encuentra no es vacía, lo cual garantiza que alguna de las áreas derechas no sea vacía, que es el grafo de D.



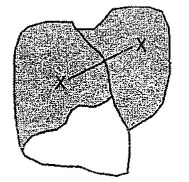


El grafo D no está contenido en el grafo I.

Antes de aplicar estas nociones para definir cuándo unos enunciados conjuntistas implican deductivamente otro, es preciso presentar antes la idea de grafo *inconsistente*. Esta idea es sencilla: un grafo es inconsistente cuando es "contradictorio", esto es, cuando algún área es a la vez vacía y no vacía. Cuando las cruces están solas, el grafo es contradictorio si hay alguna cruz (sola) que está "tachada". Pero nótese que si las cruces están unidas, el grafo no es inconsistente meramente porque alguna de ellas esté tachada. Las cruces unidas significan que alguna de las correspondientes áreas no es vacía; así pues, el grafo será inconsistente en ese caso cuando *todas* las cruces unidas estén tachadas. Veámoslo:



Este grafo no es inconsistente



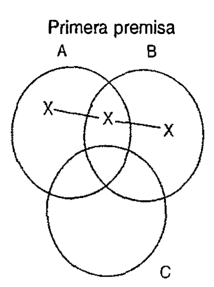
Este grafo es inconsistente

Ahora podemos caracterizar ya de modo preciso cuándo un enunciado conjuntista β (de los del tipo que estamos considerando) se sigue de otros $\alpha_1, ..., \alpha_n$. La idea es sencilla: si al combinar en un único diagrama todos los grafos de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ el grafo resultante contiene el grafo del diagrama de β, entonces la información que da β estará contenida en la que conjuntamente proporcionan $\alpha_1, ..., \alpha_n$, y por tanto β será consecuencia de ellas. Además de este caso "normal", la definición debe incluir el caso en que β se sigue de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ simplemente porque los enunciados $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son inconsistentes entre sí. Esta situación se corresponde con la ida, que ya vimos y comentamos en las dos partes anteriores, de que "de premisas contradictorias se sigue cualquier cosa". Recordemos que ello no es tan antintuitivo como puede parecer en un primer momento: quien esté dispuesto a aceptar un conjunto de afirmaciones inconsistentes "no puede rechazar nada".

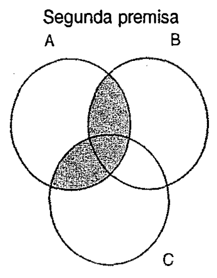
DEF β se sigue de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ syss$_{def}$
(i) el grafo de β está contenido en la combinación de grafos de $\alpha_1, ..., \alpha_n$, o
(ii) la combinación de grafos de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ da lugar a un grafo inconsistente.

EJEMPLO: Determinar si $A\text{-}B\neq\emptyset$ se sigue de $(A\cup B)\text{-}C\neq\emptyset$, $A\cap(B\cup C)=\emptyset$ y $B\subseteq(A\cup C)$

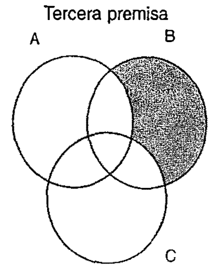
Primera premisa

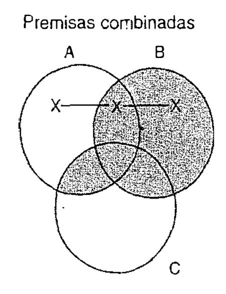


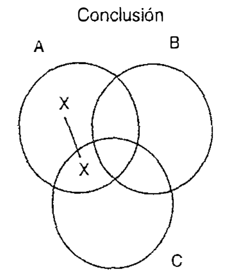
Segunda premisa



Tercera premisa

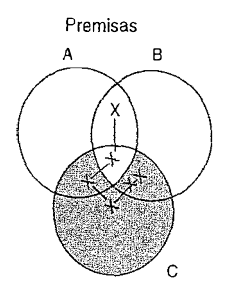


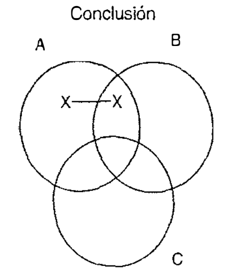




Sí se sigue.

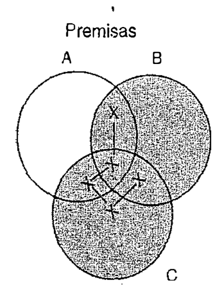
EJEMPLO: Determinar si $A\text{-}C \neq \emptyset$ se sigue de $C \cup (A \cap B) \neq \emptyset$ y $C \subseteq (A \cap B)$.

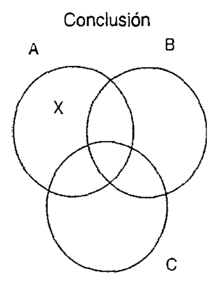




No se sigue.

EJEMPLO: Determinar si $A\text{-}(B \cup C) \neq \emptyset$ se sigue de $C \cup (A \cap B) \neq \emptyset$, $C \subseteq (A \cap B)$, $A \cap B \cap C = \emptyset$ y $B \subseteq C$.





Sí se sigue, por ser las premisas inconsistentes.

Ahora podemos ver ya cómo transcribir conjuntistamente algunos enunciados del lenguaje natural para analizar después argumentos que contienen ese tipo de enunciados.

EJERCICIOS: 51-70

3. **Formalización conjuntista**

El tipo de enunciados del lenguaje natural que nos interesa transcribir aquí coincide con lo que en lógica de primer orden identificamos con la parte del lenguaje con predicados monarios que se corresponde aproximadamente con la silogística aristotélica. La base de dicho fragmento del lenguaje eran los cuatro tipos de enunciados siguientes (como se verá en breve, los enunciados restantes surgen combinando y complicando estos básicos de diferentes modos).

Universal afirmativo: *Todos los tal son cual*
Universal negativo: *Ningún tal es cual*
Particular afirmativo: *Algún tal es cual*
Particular negativo: *Algún tal no es cual*

Para formalizar estos enunciados en lenguaje conjuntista hay que:

(a) Identificar los predicados simples involucrados
(b) Asignar a cada predicado simple un conjunto
(c) Transcribir conjuntistamente la información del enunciado

En cuanto a este último paso, las transcripciones correspondientes a cada uno de esos cuatro tipos de enunciados es la siguiente:

Sean
$T=\{x \,/\, x \text{ es tal}\}$
$C=\{x \,/\, x \text{ es cual}\}$

Universal afirmativo:
Todos los tal son cual $T \subseteq C$ o, equivalentemente,
$T-C=\emptyset$

Universal negativo:
Ningún tal es cual $T \forall C=\emptyset$

Particular afirmativo:
Algún tal es cual $T \forall C \neq \emptyset$

Particular negativo:
Algún tal no es cual $T-C \neq \emptyset$ o, equivalentemente,
$T \not\subseteq C$

Y lo mismo se aplica cuando "tal" y "cual" son complejos. Como veremos en los ejemplos, en ese caso lo único que hay que hacer es reconstruir los conjuntos relevantes mediante operaciones conjuntistas.

EJEMPLO: Hay naturalistas que no son materialistas
Conjuntos básicos:
$N =\{x \,/\, x \text{ es naturalistas}\}$
$M=\{x \,/\, x \text{ es materialista}\}$
Formalización: $N-M \neq \emptyset$

EJEMPLO: Los filósofos griegos son naturalistas
Conjuntos básicos:
F $=\{x / x$ es filósofo$\}$
G$=\{x / x$ es griego$\}$
N$= \{x / x$ es naturalista$\}$
Formalización: $F \cap G \subseteq N$

EJEMPLO: Algunos filósofos son materialistas e historicistas
Conjuntos básicos:
F $=\{x / x$ es filósofo$\}$
M$=\{x / x$ es materialista$\}$
H$= \{x / x$ es historicista$\}$
Formalización: $F \cap M \cap H \neq \varnothing$

EJEMPLO: Algunos filósofos son materialistas pero no historicistas
Conjuntos básicos:
F $=\{x / x$ es filósofo$\}$
M$=\{x / x$ es materialista$\}$
H$= \{x / x$ es historicista$\}$
Formalización: $(F \cap M)-H \neq \varnothing$

EJEMPLO: No todos los filósofos no materialistas son dualistas o panteístas
F $=\{x / x$ es filósofo$\}$
M$=\{x / x$ es materialista$\}$
D$= \{x / x$ es dualista$\}$
H$= \{x / x$ es panteísta$\}$
Formalización: $F-M \not\subseteq D \cup P$

EJERCICIOS: 71 a 85

4. **Análisis de argumentaciones**

Ahora estamos en disposición ya de analizar la validez de argumentos del lenguaje natural que no usan más de tres predicados monarios. En realidad, no tenemos mucho que explicar, pues se trata simplemente de combinar lo que hemos presentado en las secciones anteriores. Para determinar la validez/invalidez de un argumento de ese tipo, se deberá:

(a) identificar las premisas y la conclusión,
(b) identificar los predicados básicos y asignarles conjuntos
(c) formalizar en lenguaje conjuntista las premisas y la conclusión
(d) determinar mediante diagramas si la conclusión se sigue o no de las premisas.

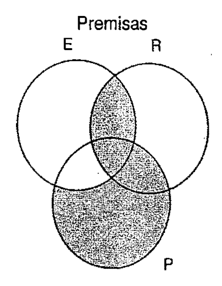
Concluiremos analizando los siguientes argumentos.

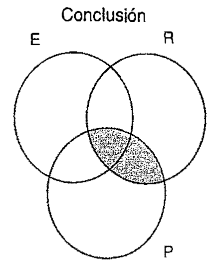
EJEMPLO: "Ningún empirista es racionalista. Los positivistas son empiristas. Por tanto, ningún positivista es racionalista."

Conjuntos base:
E ={x / x es empirista}
R={x / x es racionalista}
P= {x / x es positivista}

Formalización de premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv E \cap R = \varnothing$
$\alpha_2 \equiv P \subseteq E$
$\beta \equiv P \cap R = \varnothing$

Determinación mediante diagramas:





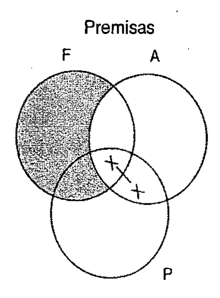
El argumento es válido.

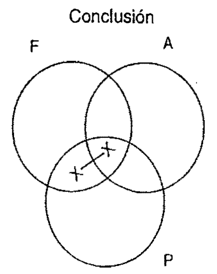
EJEMPLO: "Los filósofos son amantes de la sabiduría. Algunos amantes de la sabiduría persiguen el bien. Por tanto, algunos filósofos persiguen el bien."

Conjuntos base:
F ={x / x es filósofo}
A={x / x es amante de las sabiduría}
P= {x / x persigue el bien}

Formalización de premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv F \subseteq A$
$\alpha_2 \equiv A \cap P \neq \varnothing$
$\beta \equiv F \cap P \neq \varnothing$

Determinación mediante diagramas:





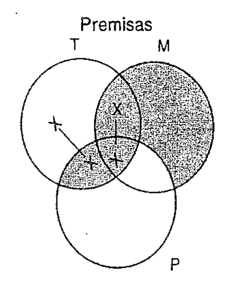
El argumento es inválido.

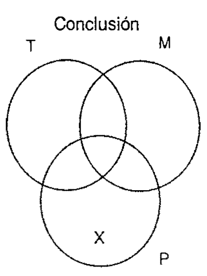
EJEMPLO: "Hay estoicos materialistas y estoicos no materialistas. Ningún epicúreo es estoico. Todos los materialistas son epicúreos. Por tanto, algún epicúreo no es estoico ni materialista."

Conjuntos base:
T ={x / x es estoico}
P ={x / x es epicúreo}
M= {x / x es materialista}

Formalización de premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv T \cap M \neq \varnothing$
$\alpha_2 \equiv T - M \neq \varnothing$
$\alpha_3 \equiv P \cap T = \varnothing$
$\alpha_4 \equiv M \subseteq P$
$\beta \equiv P \not\subseteq (T \cup M)$

Determinación mediante diagramas:





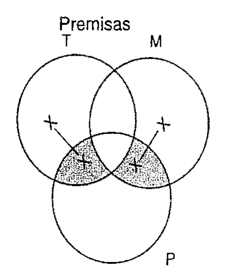
El argumento es válido, por ser las premisas inconsistentes.

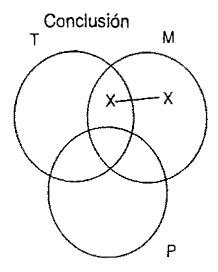
EJEMPLO: "Hay estoicos que no son materialistas. Y materialistas que no son estoicos. Los epicúreos que a la vez son estoicos, son materialistas. Y los epicúreos que son a la vez materialistas, son estoicos. Por tanto, algún materialista no es epicúreo."

Conjuntos base:
T ={x / x es estoico}
P={x / x es epicúreo}
M= {x / x es materialista}

Formalización de premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv T - M \neq \varnothing$
$\alpha_2 \equiv M - T \neq \varnothing$
$\alpha_3 \equiv (P \cap T) \subseteq M$
$\alpha_4 \equiv (P \cap M) \subseteq T$
$\beta \equiv M - P \neq \varnothing$

Determinación mediante diagramas:





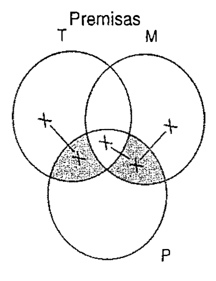
El argumento es válido.

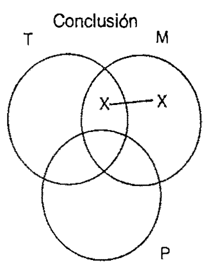
EJEMPLO: Como el anterior, pero cambiando la segunda premisa por "No todos los materialistas son estoicos no epicúreos".

Conjuntos base:
Los mismos que en el ejemplo anterior.

Formalización de premisas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conclusión β:
$\alpha_1 \equiv T\text{-}M \neq \varnothing$
$\alpha_2 \equiv M \not\subseteq T\text{-}P$
$\alpha_3 \equiv (P \cap T) \subseteq M$
$\alpha_4 \equiv (P \cap M) \subseteq T$
$\beta \equiv M\text{-}P \neq \varnothing$

Determinación mediante diagramas:





El argumento es inválido.

EJERCICIOS: 86 a 95

Ejercicios

Representar mediante diagramas los siguientes enunciados.

31 $A \subseteq B\text{-}C$
32 $A \cup B \not\subseteq C$
33 $A \cap B \subseteq C$

34 $A-B\not\subseteq C$
35 $A-(B\cup C)=\varnothing$
36 $A-(B-C)\neq\varnothing$
37 $(A\cup B)-C=\varnothing$
38 $(A-B)-C=\varnothing$
39 $(A-B)\cup\neq\varnothing$
40 $(A-B)\cap C=\varnothing$
41 $A\cup(B-C)\neq\varnothing$
42 $A\cap(B-C)=\varnothing$
43 $A\cup(B\cap C)\neq\varnothing$
44 $(A\cup B)-C\subseteq A$
45 $(A\cup B)-C\not\subseteq A$
46 $(A\cup B)\cap C\subseteq A$
47 $(A\cap B)\cup C\not\subseteq A$
48 $(A\cap B)\cup(B\cap C)\neq\varnothing$
49 $(A\cup C)-(B\cap C)\subseteq C-A$
50 $(A-C)\cup(B\cap C)\subseteq C\cup B$

En las siguientes series de enunciados conjuntistas, tómese el último como pretendida conclusión y los anteriores como premisas. Determinar entonces: (a) si las premisas son consistentes entre sí; (b) si la pretendida conclusión es consecuencia, independiente o contradictoria respecto de las premisas.

51	(1) $A\not\subseteq B-C$	(2) $A-B\neq\varnothing$			
52	(1) $B-C\subseteq A$	(2) $(C\cap B)-A=\varnothing$			
53	(1) $A\cap B\cap C=\varnothing$	(2) $(A\cup C)-B\neq\varnothing$			
54	(1) $A\subseteq B$	(2) $B\subseteq C$	(3) $A\cap C=\varnothing$		
55	(1) $A\cap B=\varnothing$	(2) $C\subseteq A$	(3) $C\cap B=\varnothing$		
56	(1) $B\cap A=\varnothing$	(2) $C\cap B\neq\varnothing$	(3) $C\not\subseteq A$		
57	(1) $A\subseteq B$	(2) $C-A\neq\varnothing$	(3) $B\cap C=\varnothing$		
58	(1) $A\subseteq B$	(2) $B\subseteq C$	(3) $A\cap C\neq\varnothing$		
59	(1) $C-A\neq\varnothing$	(2) $A\subseteq B$	(3) $C\cap B\neq\varnothing$		
60	(1) $C-A=\varnothing$	(2) $B\subseteq A$	(3) $C-B=\varnothing$		
61	(1) $A\cap B\neq\varnothing$	(2) $B\cap C\neq\varnothing$	(3) $A\cap C\neq\varnothing$		
62	(1) $A\cap B\neq\varnothing$	(2) $B-C=\varnothing$	(3) $A\cap C\neq\varnothing$		
63	(1) $A\subseteq B$	(2) $(A\cup C)\cap B\neq\varnothing$	(3) $B-C=\varnothing$		
64	(1) $(A\forall C)-B\neq\varnothing$	(2) $(A\cap B)\cup C=\varnothing$	(3) $A\cup(C-B)\neq\varnothing$		
65	(1) $(A\forall B)-C\neq\varnothing$	(2) $C\subseteq A-B$	(3) $B-C=\varnothing$		
66	(1) $B-A=\varnothing$	(2) $A\subseteq C$	(3) $C\not\subseteq B$	(4) $A\neq\varnothing$	
67	(1) $A-(B\cup C)\neq\varnothing$	(2) $B\not\subseteq(A\cup C)$	(3) $C-(A\cup B)\neq\varnothing$	(4) $(A\cap B)\cup C\neq\varnothing$	
68	(1) $(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)\neq\varnothing$	(2) $A\neq\varnothing$	(3) $B\neq\varnothing$	(4) $C\neq\varnothing$	
69	(1) $A\cap B=\varnothing$	(2) $A\cap C=\varnothing$	(3) $B\cap C=\varnothing$	(4) $B\subseteq(A\cup C)$	(5) $B=\varnothing$
70	(1) $A\not\subseteq C$	(2) $A\cap B\neq\varnothing$	(3) $B\subseteq C$	(4) $A\subseteq(B\cup C)$	(5) $C-A\neq\varnothing$

Formalizar en TC los siguientes enunciados, indicando los conjuntos denotados por las letras que se usen.

71 Todos los novatos son ingenuos.

72 Algunos intelectuales son frívolos.

73 Ningún repetidor es estudioso.

74 Algunos lógicos no son sensatos.

75 No todos los combustibles son contaminantes.

76 Bastantes chiflados son simpáticos.

77 La mayoría de los políticos son dogmáticos.

78 Algún europeo bajito disfruta con Mozart pero no con Wagner.

79 Cualquier lector espabilado acaba la carrera en doce años.

80 Ningún saltamontes que juega a tenis baila el Fox-Trot.

81 Hay comidas que no son saludables aunque sí exquisitas.

82 Muchos ingleses que toman té fuman desesperadamente pero comen con moderación.

83 A algunos alumnos que no son serios les gusta el griego pero no las matemáticas.

84 Cualquiera que sea aficionado al griego es brillante o pesado.

85 Tanto los novatos como los repetidores odian las matemáticas.

Formalizar en TC los siguientes enunciados, indicando los conjuntos denotados por las letras que se usen.

86 Los pájaros vuelan. Los pájaros son animales. en consecuencia, todo animal vuela.

87 Algunos hombres son virtuosos. Algunos delincuentes son hombres. en consecuencia, algujnos delincuentes son virtuosos.

88 Todo lo que piensa existe. Ningún cuerpo piensa. En consecuencia, ningún cuerpo existe.

89 Los filósosfos enciclopedistas son mediocres. Los filósosfos enciclopedistas son filósofos franceses. En consecuencia, los filósofos franceses son medicores

90 Algún posmoderno no es moderno. Los yupis son modernos. En consecuencia, algún yupi no es posmoderno.

91 Ningún ser es no ser. Todo lo pensable es ser. En consecuencia, ningún no ser puede ser pensado.

92 Todo mamífero es vertebrado. Algún vertebrado no es mamífero. Ninguna gallina es mamífero. en consecuencia, todas las gallinas no son vertebrados.

93 Todo camaleón misógino es alegre o interesante. En consecuencia, algún camaleón misógino es interesante.

94 Los materiales son empiristas. No todo empirista es funcionalista. Muchos funcionalistas son materialistas. En consecuencia, algún empirista no es materialista.

95 Los materialistas son empiristas. No todo empirista es funcionalista. Muchos funcionalistas son materialistas. Los empiristas materialistas no son funcionalistas. En consecuencia, algún empirista no es materialista.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

LÓGICA PROPOSICIONAL

SEGUNDA PARTE

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

TERCERA PARTE

TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS